Interpolation de noyaux d'opérateurs différentiels, application aux méthodes spectrales

Christine BERNARDI, Monique DAUGE et Yvon MADAY

Résumé — Nous présentons quelques résultats d'interpolation entre les noyaux d'un opérateur différentiel fixé dans différents espaces de Sobolev, avec ou sans conditions aux limites. Une application est l'approximation optimale d'une fonction à divergence nulle par des polynômes de haut degré à divergence nulle.

Interpolation of nullspaces of differential operators with application to spectral methods

Abstract —*We present some results concerning the interpolation of nullspaces of the same differential operator in Sobolev spaces of different orders, with or without boundary conditions. As an application, we derive the optimal approximation of divergence-free functions by high degree divergence-free polynomials.*

Abridged English Version — 1. INTRODUCTION.— For any pair (X, Y) of Hilbert spaces such that X is dense in Y, the interpolation space $[X, Y]_\theta$ is well defined for $0 < \theta < 1$. For a fixed differential operator A, we exhibit conditions insuring the interpolation property (2) between the nullspaces of A introduced in (1). We treat two situations: in Section 2, when X and Y are the usual Hilbert Sobolev spaces; in Section 3, when these spaces are replaced by their intersection with $H^1_0(\Omega)$ and the operator A is the divergence operator. Combining our results with an approximation estimate of [8], we prove in Section 4 that the best approximation of divergence-free functions by high degree divergence-free polynomials is optimal. Our application is the numerical analysis of a spectral discretization of the Stokes problem. We refer to [1] for detailed proofs.

2. INTERPOLATION WITHOUT BOUNDARY CONDITIONS.— From now on, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, with a Lipschitz–continuous boundary, and A is a differential operator on $\mathscr{D}'(\Omega)^\ell$. We present an interpolation result between the nullspaces $\mathscr{N}^s_A(\Omega)$ and $\mathscr{N}^r_A(\Omega)$ defined in (3).

Theorem 1. *If Ω is star-shaped with respect to an open ball B and if the operator A is homogeneous with constant coefficients, the interpolation result* (6) *holds for any real numbers r and s, $0 \leq r \leq s$, and for any θ, $0 < \theta < 1$.*

The proof relies on the characterization of the interpolation space as a trace space [5] which is recalled in (4): we construct a lifting operator by formula (5), where χ is a smooth function with support in B and integral equal to 1. Since A is homogeneous with constant coefficients, for any function φ such that $A\varphi = 0$, the property $AF^\chi\varphi(., t) = 0$ holds for any t in $]0, 1[$. This allows to prove Theorem 1.

Theorem 2. *If the operator A can be extended into an elliptic operator with analytic coefficients on a neighbourhood of $\overline{\Omega}$, the interpolation result* (6) *holds for any real numbers r and s, $0 \leq r \leq s$, and for any θ, $0 < \theta < 1$. This result also holds when A is the divergence operator.*

Note présentée par Philippe G. CIARLET

The proof uses an interpolation result between nullspaces of an operator A which follows from [5, Ch. 1, Th. 14.3]: property (2) holds when A has a right-inverse which is continuous from appropriate spaces $\tilde{X}$ and $\tilde{Y}$ into X and Y respectively.

3. INTERPOLATION WITH BOUNDARY CONDITIONS.— In this section, we consider the case where A is the divergence operator and we denote by $\mathscr{N}^s_{\mathrm{div}}(\Omega)$ the corresponding nullspaces $\mathscr{N}^s_A(\Omega)$.

Theorem 3. *The interpolation property* (7) *holds for any* θ, $0 < \theta < 1$, *and for any real numbers* r *and* s *with* $1 \le r \le s$ *and:*
i) with $s \le m$ *if* Ω *is a bounded domain in* $\mathbb{R}^d$ *of class* $\mathscr{C}^{m-1,1}$, $m > 0$,
ii) with $s \le 3.739$ *if* Ω *is the cylinder* $\Sigma \times]-1,1[$ *for a bounded domain* Σ *of class* $\mathscr{C}^{3,1}$,
iii) with $s \le 3.739$ *if* Ω *is the cube* $]-1,1[^3$.

The argument is again the right-inverse method. According to the type of geometry, we build a right-inverse for either the divergence operator or the trace operator or both of them: for *i)* we solve a Stokes problem (see (8)), for *ii)* we solve a modified Stokes operator which has better regularity properties (see (9)) and for *iii)* we lift the trace of a divergence-free function by the curl of an appropriate function. The limitation $s \le 3.739$ is related to the leading singularity of the Stokes problem on a square, which behaves as the power 2.739 of the distance to the corners.

4. APPLICATION.— For the Stokes problem (10) in the cube $\Omega =]-1,1[^3$, we choose a spectral discretization (see [6]) which leads to the discrete problem (11) for each positive integer N (here $\mathbb{P}_n(\Omega)$ stands for the space of all polynomials on Ω with partial degrees $\le n$ and $\mathbb{P}^0_n(\Omega)$ stands for its intersection with $H^1_0(\Omega)$). The well-posedness of this problem relies on the existence [6] of the inf-sup condition (12), which also yields the error estimate (13), V_N denoting the space of polynomials in $\mathbb{P}^0_N(\Omega)^3$ such that their divergence is orthogonal to $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$. Due to (14), it remains to estimate the quantity $\inf_{\boldsymbol{w}_N \in V_N} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N\|_{H^1(\Omega)^3}$.

The standard result is stated in (15), however it cannot lead to optimal error on the velocity since the constant β_N of the inf-sup condition behaves like $c\,N^{-1}$. Another idea is to approximate a function in $\mathscr{N}^1_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)^3$ by a polynomial in the space $\mathscr{N}^1_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap \mathbb{P}^0_N(\Omega)^3$ which is strictly contained in V_N. A first result is due to [8] but it only holds for functions in $\mathscr{N}^s_{\mathrm{div}}(\Omega)$, $s \ge 3$. Then an interpolation argument relying on this estimate together with Theorem 3 allows to prove:

Proposition 4. *Estimate* (16) *holds for any function* $\boldsymbol{w}$ *in* $\mathscr{N}^s_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)^3$, $s \ge 1$.

From (13), (14) and Proposition 4, we derive the error estimate (17) when the solution $(\boldsymbol{u}, p)$ of problem (10) belongs to $H^s(\Omega)^3 \times H^{s-1}(\Omega)$, $s \ge 1$. This estimate is optimal for the velocity and always insures the convergence of the method, which is useful for the numerical analysis of the extension to the full nonlinear Navier–Stokes equations.

---

1. INTRODUCTION.— Dans cette note, on s'intéresse à l'interpolation de noyaux d'un opérateur différentiel donné. Plus précisément, si X et Y sont des espaces de Hilbert tels que X soit dense dans Y, on peut définir pour tout θ, $0 < \theta < 1$, l'espace interpolé $[X, Y]_\theta$ indépendamment de la technique d'interpolation hilbertienne utilisée (K–méthode,

méthode de traces,...). Si A est un opérateur différentiel fixé défini sur Y, on peut introduire les noyaux

$$\mathscr{N}_A^X = \{u \in X;\ Au = 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{N}_A^Y = \{u \in Y;\ Au = 0\}. \tag{1}$$

On établit que, dans un certain nombre de situations, on a le résultat suivant (d'ailleurs bien connu lorsque A est de rang fini):

$$[\mathscr{N}_A^X, \mathscr{N}_A^Y]_\theta = \{u \in [X, Y]_\theta;\ \ Au = 0\}. \tag{2}$$

Dans le paragraphe 2, on traite le cas où X et Y sont des espaces de Sobolev classiques $H^s(\Omega)$ et $H^r(\Omega)$, par deux arguments différents. Dans le paragraphe 3, on considère le cas où X et Y sont l'intersection des espaces de Sobolev précédents avec l'espace $H_0^1(\Omega)$ des fonctions à trace nulle sur la frontière de Ω, lorsque A est l'opérateur de divergence. Les résultats sont ici limités par la régularité du domaine, ce qui explique pourquoi on traite successivement les cas d'un ouvert régulier, d'un cylindre et d'un cube. Dans le paragraphe 4, on prouve un résultat d'approximation optimale de fonctions à divergence nulle par des polynômes de haut degré à divergence nulle dans un cube, en combinant la propriété établie dans le paragraphe 3 avec une estimation de [8]. Ceci est crucial pour l'analyse numérique de la discrétisation spectrale du problème de Stokes. On réfère à [1] pour les démonstrations ainsi que pour l'extension aux espaces à poids qui interviennent dans les méthodes spectrales de type Tchebycheff.

2. INTERPOLATION SANS CONDITIONS AUX LIMITES.— Dans toute la suite, Ω est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et A désigne un opérateur différentiel sur $\mathscr{D}'(\Omega)^\ell$. On cherche à interpoler les noyaux $\mathscr{N}_A^s(\Omega)$ et $\mathscr{N}_A^r(\Omega)$, où $\mathscr{N}_A^s(\Omega)$ est défini par

$$\mathscr{N}_A^s(\Omega) = \{v \in H^s(\Omega)^\ell;\ Av = 0\}. \tag{3}$$

2.a. La méthode de traces. – On rappelle le résultat suivant [5]: si X et Y sont des espaces de Hilbert tels que X soit inclus dans Y avec injection continue et dense, on a pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout θ, $0 < \theta < 1$,

$$[X, Y]_\theta = \Big\{v(.,0);\ \int_0^1 \Big(\|v(.,t)\|_X^2 + \|(\frac{d^k v}{dt^k})(.,t)\|_Y^2\Big)\, t^{2k\theta-1}\, dt < +\infty\Big\}. \tag{4}$$

Si Ω est étoilé par rapport à tous les points d'une boule ouverte non vide B, et si χ est une fonction régulière d'intégrale 1 à support dans B, l'opérateur F^χ défini par

$$F^\chi \varphi(\boldsymbol{x}, t) = \int_B \varphi\big((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\big)\, \chi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \tag{5}$$

transforme les fonctions définies sur Ω en fonctions définies sur le cylindre $\Omega \times]0, 1[$, et est continu, pour tout réel $\beta > -1$ et pour tout réel $s \geq \frac{1+\beta}{2}$, de $H^{s-\frac{1+\beta}{2}}(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev à poids sur $\Omega \times]0, 1[$, d'ordre s, associé à la mesure $t^\beta\, d\boldsymbol{x}\, dt$. Enfin, si A est homogène à coefficients constants, on observe que toute fonction φ vérifiant $A\varphi = 0$, satisfait la propriété $AF^\chi\varphi(.,t) = 0$ pour tout t dans $]0, 1[$. Utilisant (4), on obtient alors:

Théorème 1. *Si Ω est étoilé par rapport à tous les points d'une boule ouverte, et si A est homogène à coefficients constants, le résultat d'interpolation suivant est vrai pour tous réels r et s, $0 \leq r \leq s$, et pour tout θ, $0 < \theta < 1$:*

$$[\mathscr{N}_A^s(\Omega), \mathscr{N}_A^r(\Omega)]_\theta = \mathscr{N}_A^{(1-\theta)s+\theta r}(\Omega). \tag{6}$$

2.b. La méthode d'inversion. – On utilise ici un autre résultat de [5]: soit X et Y (resp. $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$) des espaces de Hilbert tels que X (resp. $\widetilde{X}$) soit inclus dans Y (resp. $\widetilde{Y}$) avec injection continue et dense, et soit A un opérateur continu de X dans $\widetilde{X}$ et de Y dans $\widetilde{Y}$. S'il existe un inverse à droite $\mathcal{R}$ de A sur $\widetilde{Y}$ (c'est-à-dire tel que $A(\mathcal{R}g) = g$ pour tout g dans $\widetilde{Y}$), continu de $\widetilde{X}$ dans X et de $\widetilde{Y}$ dans Y, alors on a le résultat d'interpolation (2).

Il existe (voir par exemple [7, Ch. 2, Th. 3.10]) un opérateur de prolongement $\mathcal{E}$ continu pour tout $s \geq 0$ de $H^s(\Omega)$ dans $H^s(\Omega_0)$, où Ω_0 est un voisinage de $\overline{\Omega}$. Lorsque l'opérateur A se prolonge en un opérateur elliptique à coefficients analytiques sur Ω_0, on peut construire un inverse à droite: $v = \mathcal{R}g$ est alors la solution du problème $Av = \mathcal{E}g$ dans Ω_0, avec des conditions aux limites appropriées sur $\partial\Omega_0$. Lorsque l'opérateur A est la divergence, on construit l'opérateur $\mathcal{R}$ en résolvant un problème de Stokes dans Ω_0 dont la solution $\boldsymbol{v} = \mathcal{R}g$ vérifie $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \mathcal{E}g$. On démontre ainsi le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit A un opérateur se prolongeant en un opérateur elliptique à coefficients analytiques dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Le résultat d'interpolation* (6) *est vrai pour tous réels r et s, $0 \leq r \leq s$, et pour tout θ, $0 < \theta < 1$. Ce résultat est également vrai lorsque A est l'opérateur de divergence.*

3. INTERPOLATION AVEC CONDITIONS AUX LIMITES.— Pour simplifier, on se limite maintenant au cas où l'opérateur A est l'opérateur de divergence et on note $\mathscr{N}^s_{\mathrm{div}}(\Omega)$ les noyaux $\mathscr{N}^s_A(\Omega)$ correspondants. On cherche à établir que:

$$[\mathscr{N}^s_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)^d, \mathscr{N}^r_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)^d]_\theta = \mathscr{N}^{(1-\theta)s+\theta r}_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)^d. \tag{7}$$

La démonstration utilise encore l'argument du paragraphe 2.b et repose sur la construction d'un inverse à droite soit de l'opérateur de divergence, soit du premier opérateur de traces γ_0, soit des deux à la fois.

3.a. Cas d'un domaine régulier. – On résout le problème de Stokes:

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\, p = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = g & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

L'opérateur $\mathcal{R}$: $(g, \boldsymbol{h}) \mapsto \boldsymbol{v}$ est un inverse à droite du couple (A, γ_0) défini sur le sous-espace de $L^2(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^d$ formé par les $(g, \boldsymbol{h})$ vérifiant $\int_\Omega g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{h} \,.\, \boldsymbol{n})(\tau)\, d\tau$, et à valeurs dans $H^1(\Omega)^d$. Toutefois les propriétés de régularité du problème (8) sont limitées par celles du domaine.

3.b. Cas d'un cylindre. – Ici Ω est de la forme $\Sigma \times]-1, 1[$, où Σ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{d-1}$. La présence des arêtes $\partial\Sigma \times \{\pm 1\}$ limite la régularité des solutions de (8). C'est pourquoi on construit un opérateur $\boldsymbol{M}$ tel que le problème modifié:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\, p = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = g & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

ait des propriétés de régularité légèrement supérieures à celles du problème (8) (voir [3]): la limite de régularité ne vient plus de la première singularité du Laplacien dans un carré (qui se comporte en $r^2 \log r$, r étant la distance au coin) mais de la première singularité du problème de Stokes dans un carré (qui se comporte en $r^{2{,}739}$). On utilise donc l'opérateur $\mathcal{R}$: $(g, \boldsymbol{h}) \mapsto \boldsymbol{v}$ correspondant à (9).

3.c. Cas d'un cube. – Pour le cube $\Omega =]-1,1[^3$, on utilise deux types d'arguments, tous deux relativement techniques (voir [1]). La première idée consiste à résoudre un problème comme (9), en tenant compte, en plus, des singularités de coins (qui, contrairement aux singularités d'arête, ne forment qu'un espace de dimension finie). Le second type de démonstration consiste à associer à toute fonction $\boldsymbol{u}$ de $\mathscr{N}^1_{\text{div}}(\Omega)$ une fonction $\boldsymbol{\psi}$, ne dépendant que de la trace de $\boldsymbol{u}$ sur $\partial\Omega$, telle que $\boldsymbol{u} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$ appartienne à $H^1_0(\Omega)^3$, l'opérateur $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$ étant continu de $\mathscr{N}^s_{\text{div}}(\Omega)$ dans lui-même pour certaines valeurs de s.

Théorème 3. *Le résultat d'interpolation* (7) *est vrai pour tout* θ, $0 < \theta < 1$ *et pour tous réels* r *et* s, $1 \le r \le s$,
i) avec $s \le m$ *si* Ω *est un domaine borné de* $\mathbb{R}^d$ *de classe* $\mathscr{C}^{m-1,1}$, $m > 0$,
ii) avec $s \le 3.739$ *si* Ω *est le cylindre* $\Sigma \times]-1,1[$ *pour un domaine borné* Σ *de classe* $\mathscr{C}^{3,1}$,
iii) avec $s \le 3.739$ *si* Ω *est le cube* $]-1,1[^3$.

4. APPLICATION.— Soit le problème de Stokes classique dans le cube $\Omega =]-1,1[^3$:

$$\begin{cases} -\nu\,\Delta\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}\,p = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

où la donnée $\boldsymbol{f}$ est une densité de forces volumiques dans $H^{-1}(\Omega)^3$, ν est un paramètre positif représentant la viscosité du fluide. Les inconnues sont la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression p. Ce problème admet une solution unique $(\boldsymbol{u}, p)$, avec $\boldsymbol{u}$ dans $H^1_0(\Omega)^3$ et p dans $L^2_0(\Omega)$ (qui est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle).

Parmi les différentes discrétisations spectrales de ce problème, nous présentons la plus simple [6]. On note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des polynômes sur Ω, de degré $\le n$ par rapport à chaque variable, et $\mathbb{P}^0_n(\Omega)$ le sous-espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$. Soit N un entier positif fixé. Le problème discret s'obtient par méthode de Galerkin à partir de la formulation variationnelle du problème (10): *trouver* $(\boldsymbol{u}_N, p_N)$, *avec* $\boldsymbol{u}_N$ *dans* $\mathbb{P}^0_N(\Omega)^3$ *et* p_N *dans* $(\mathbb{P}_{N-2} \cap L^2_0)(\Omega)$, *tel que, pour tous* v_N *dans* $\mathbb{P}^0_N(\Omega)^3$ *et* q_N *dans* $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &\nu \int_\Omega \mathbf{grad}\,\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x}) \,.\, \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}_N(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}_N(\boldsymbol{x})\,p_N(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N>, \\ &-\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})\,q_N(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

(dans la pratique, les intégrales qui apparaissent dans (11) sont remplacées par des formules de quadrature, toutefois cette modification est sans incidence sur les résultats qui suivent). Les propriétés du problème (11) viennent de l'existence d'une condition inf-sup qui est démontrée dans [2, Thm 25.7] et [6] par exemple:

$$c\,N^{-1} \ge \beta_N = \inf_{q_N \in (\mathbb{P}_{N-2} \cap L^2_0)(\Omega)} \ \sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{P}^0_N(\Omega)^3} \frac{b(\boldsymbol{v}_N, q_N)}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{H^1(\Omega)^3}\,\|q_N\|_{L^2(\Omega)}} \ge c'\,N^{-1}. \tag{12}$$

Le problème (11) a donc une solution unique. De plus, on a l'estimation d'erreur

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{H^1(\Omega)^3} + N^{-1}\,\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad \le c\Big(\inf_{\boldsymbol{w}_N \in V_N} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N\|_{H^1(\Omega)^3} + \inf_{q_N \in (\mathbb{P}_{N-2} \cap L^2_0)(\Omega)} \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} \Big), \end{aligned} \tag{13}$$

où V_N est le noyau discret formé par les polynômes de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)^3$ dont la divergence est orthogonale à $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$. Si l'on suppose la solution $(\boldsymbol{u}, p)$ du problème (10) dans $H^s(\Omega)^3 \times H^{s-1}(\Omega)$, $s \geq 1$, la majoration habituelle — et optimale — de l'erreur d'approximation s'écrit (voir [2, §7]):

$$\inf_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega)^3} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N\|_{H^1(\Omega)^3} + \inf_{q_N \in (\mathbb{P}_{N-2} \cap L_0^2)(\Omega)} \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, N^{1-s} \big(\|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)^3} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)}\big). \tag{14}$$

Il reste à estimer le terme $\inf_{\boldsymbol{w}_N \in V_N} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N\|_{H^1(\Omega)^3}$. Il est bien connu [4, Ch. II, (1.16)]:

$$\inf_{\boldsymbol{w}_N \in V_N} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N\|_{H^1(\Omega)^3} \leq \frac{c}{\beta_N} \inf_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega)^3} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N\|_{H^1(\Omega)^3}, \tag{15}$$

mais dans le cas présent ceci ne peut mener à une erreur optimale sur la vitesse. C'est pourquoi on préfère construire directement une approximation de la fonction $\boldsymbol{u}$ par un polynôme de $\mathscr{N}_{\mathrm{div}}^1(\Omega) \cap \mathbb{P}_N^0(\Omega)^3$ (qui est strictement contenu dans V_N). Le premier résultat dans cette direction figure dans [8]: pour tout réel $s \geq 3$, on a pour toute fonction $\boldsymbol{w}$ de $\mathscr{N}_{\mathrm{div}}^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^3$,

$$\inf_{\boldsymbol{w}_N \in \mathscr{N}_{\mathrm{div}}^1(\Omega) \cap \mathbb{P}_N^0(\Omega)^3} \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_N\|_{H^1(\Omega)^3} \leq c\, N^{1-s} \|\boldsymbol{w}\|_{H^s(\Omega)^3}. \tag{16}$$

Toutefois, la vitesse $\boldsymbol{u}$ du problème de Stokes n'appartient pas à $H^3(\Omega)^3$ pour toutes les données $\boldsymbol{f}$ dans $H^1(\Omega)^3$, ceci étant dû à la présence de singularités d'arêtes. On introduit alors l'opérateur de projection orthogonale de $\mathscr{N}_{\mathrm{div}}^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^3$ sur $\mathscr{N}_{\mathrm{div}}^1(\Omega) \cap \mathbb{P}_N^0(\Omega)^3$ et en utilisant le théorème général de l'interpolation [5, Ch. 1, Th. 5.1] combiné avec (16) et le Théorème 3, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4. *L'estimation* (16) *est vraie pour toute fonction* $\boldsymbol{w}$ *de* $\mathscr{N}_{\mathrm{div}}^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^3$, *où* s *est un réel* ≥ 1.

De (13), (14) et de la Proposition 4, on déduit finalement que la majoration d'erreur suivante est vraie dès que la solution $(\boldsymbol{u}, p)$ du problème (10) appartient à $H^s(\Omega)^3 \times H^{s-1}(\Omega)$, $s \geq 1$:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{H^1(\Omega)^3} + N^{-1} \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, N^{1-s} \big(\|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)^3} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)}\big). \tag{17}$$

Elle est optimale pour la vitesse et assure la convergence de la méthode sans aucune hypothèse sur la régularité de la solution exacte. On peut étendre la discrétisation spectrale (11) aux équations de Navier–Stokes, et le résultat de convergence (17) est utile pour l'analyse numérique du problème discret non linéaire.

Références Bibliographiques

[1] C. Bernardi, M. Dauge et Y. Maday, Interpolation of nullspaces for polynomial approximation of divergence-free functions in a cube, soumis à *Proc. Conf. Boundary Value Problems and Integral Equations in Nonsmooth Domains*.

[2] C. Bernardi et Y. Maday, *Spectral Methods*, dans le *Handbook of Numerical Analysis*, P.G. Ciarlet & J.-L. Lions eds., North-Holland (1994).

[3] M. Dauge, *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Lecture Notes in Mathematics **1341**, Springer–Verlag (1988).

[4] V. Girault et P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for the Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer–Verlag (1986).

[5] J.-L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod (1968).

[6] Y. Maday, A.T. Patera et E.M. Rønquist, The $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ method for the approximation of the Stokes problem, Rapport interne **92025**, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1992), à paraître dans *Numer. Math.*

[7] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson (1967).

[8] G. Sacchi Landriani et H. Vandeven, Polynomial approximation of divergence-free functions, *Math. Comput.* **52** (1989), p. 103–130.

C. B. et Y. M. : *Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65, 5ème étage, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05;*

M. D. : *Mathématiques, Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03.*