Un résultat de densité pour les équations de Maxwell

Faker Ben Belgacem[1], Christine Bernardi[2], Martin Costabel[3], Monique Dauge[3]

[1] M.I.P. (UMR C.N.R.S. 5640), Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex.

[2] Analyse Numérique, C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie, B.C. 187, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.

[3] IRMAR (URA C.N.R.S. 305), Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

Résumé – Nous démontrons la densité des champs réguliers dans l'espace des champs de carré intégrables, dont le rotationnel est également de carré intégrable ainsi que la trace tangentielle sur le bord. Cet espace intervient dans une formulation variationnelle des équations de l'électromagnétisme.

A density result for Maxwell's equations

Abstract – *We prove the density of regular fields in the space of square-integrable fields with square-integrable curls and square-integrable tangential traces on the boundary. This space is involved in one of the variational formulations of the electromagnetism equations.*

Abridged English Version

1. Introduction.

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ or 3, with a Lipschitz-continuous boundary. This note is aimed to prove the density of the space $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^d$ of infinitely differentiable vector fields in the space of square-integrable vector fields on the domain Ω, with square-integrable curls on Ω and square-integrable tangential traces on $\partial\Omega$, without restriction on the regularity of the domain. Indeed, as explained in [3] for instance, this space is involved in one of the variational formulations of the electromagnetism system (the fact that the tangential traces belong to $L^2(\partial\Omega)^{d-1}$ comes from the Silver–Müller conditions that are enforced on absorbing boundaries). So the density property is necessary in order to prove the equivalence of the partial differential equations of electromagnetism with this variational formulation.

We prove firstly a preliminary result, next the density property successively in the two- and three-dimensional cases. The key idea consists in writing the vector field as the sum of a field with null tangential trace and a curl-free field. We thank Michel CROUZEIX who gave us the right idea for proving the first theorem.

2. PRELIMINARIES.

The first step consists in proving the density results for fields which are gradients of functions in $H^1(\Omega)$.

Theorem. *The space $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ is dense in the space*

$$W(\Omega) = \Big\{ \chi \in H^1(\Omega);\ \chi|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega) \Big\}.$$

The idea of the proof consists in partitioning Ω into star-shaped open sets Ω_k and using a simple trace lifting on each Ω_k.

3. THE TWO-DIMENSIONAL CASE.

Theorem. *The space $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^2$ is dense in the space*

$$V(\Omega) = \Big\{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^2; \mathrm{curl}\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega) \text{ and } \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \in L^2(\partial\Omega) \Big\}.$$

Let $\boldsymbol{v}$ be any function in $V(\Omega)$. The proof is performed in three steps.
1) Firstly, for $1 \le i \le I$, we introduce a function μ_i in $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ that is equal to 1 on Γ_i and vanishes on the other components of the boundary, and we define the function φ_i by (3).
2) Next, the function g being defined by (4) on each Γ_i, we observe that the Dirichlet problem (5) has a unique solution χ and that this solution belongs to $W(\Omega)$. So, thanks to the previous theorem, it is the limit of a sequence $(\chi_n)_n$ of $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ in $W(\Omega)$. Hence, the sequence $(\mathbf{grad}\ \chi_n)_n$ converges to $\mathbf{grad}\ \chi$ in $V(\Omega)$.
3) The function $\boldsymbol{v} - \mathbf{grad}\ \chi - \sum_{i=0}^{I} \varphi_i$ belongs to $V(\Omega)$ and its tangential trace vanishes on $\partial\Omega$, so it is the limit in $H(\mathrm{curl}\,,\Omega)$ (functions in $L^2(\Omega)^2$ with curls in $L^2(\Omega)$) of a sequence $(\boldsymbol{w}_n)_n$ in $\mathscr{D}(\Omega)^2$, see [2, Chapter I, Thm 2.12].
This concludes the proof.

4. THE THREE-DIMENSIONAL CASE.

Theorem. *The space $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$ is dense in the space*

$$V(\Omega) = \Big\{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{curl}\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3 \text{ and } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \in L^2(\partial\Omega)^2 \Big\}.$$

The proof of this theorem is more technical than in the two-dimensional case. It requires a preliminary result concerning functions in $V(\Omega)$ such that $\mathbf{curl}\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ is zero on the boundary and also makes use of the density in $W(\Omega)$.

1. Introduction.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, à frontière lipschitzienne. Le but de cette note est de prouver la densité de l'espace $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^d$ des champs de vecteurs indéfiniment différentiables dans l'espace des champs de carré intégrable sur Ω, dont le rotationnel est également de carré intégrable sur Ω et la trace tangentielle est de carré intégrable sur $\partial\Omega$, sans restriction sur la régularité de l'ouvert. En effet, comme indiqué dans [3] par exemple, cet espace intervient dans une des formulations variationnelles du système de l'électromagnétisme (la condition de trace tangentielle dans $L^2(\partial\Omega)$ vient des conditions de Silver–Müller sur la frontière supposée absorbante). Et la propriété de densité est donc nécessaire pour prouver l'équivalence des équations aux dérivées partielles de l'électromagnétisme avec cette formulation variationnelle.

Après des préliminaires, nous établissons le résultat de densité d'abord dans le cas de la dimension 2, puis en dimension 3. Nous remercions Michel Crouzeix pour l'idée de la démonstration du premier théorème.

2. Préliminaires.

Étant donné un champ de vecteurs quelconque $\boldsymbol{v}$ de carré intégrable ainsi que son rotationnel et sa trace tangentielle, notre but est de démontrer qu'il existe une suite $(\boldsymbol{v}_n)_n$ de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^d$ telle que, en dimension $d = 2$, resp. en dimension $d = 3$:
1) $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_n)_n$ tende vers 0 dans $L^2(\Omega)^d$,
2) $\big(\mathrm{rot}\ (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_n)\big)_n$, resp. $\big(\mathbf{rot}\ (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_n)\big)_n$, tende vers 0 dans $L^2(\Omega)$, resp. $L^2(\Omega)^3$,
3) $\big((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_n) \cdot \boldsymbol{\tau}\big)_n$, resp. $\big((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_n) \times \boldsymbol{n}\big)_n$, tende vers 0 dans $L^2(\partial\Omega)$, resp. $L^2(\partial\Omega)^2$.

L'idée de base consiste à écrire $\boldsymbol{v}$ comme somme de deux termes dont l'un est à trace tangentielle nulle et l'autre à rotationnel nul. C'est ce que nous faisons en dimension 2. En dimension 3 une telle décomposition ne permet de traiter que des éléments vérifiant en plus $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Nous complétons donc la décomposition par un troisième morceau dans $H^1(\Omega)^3$ qui relève la composante normale du rotationnel sur le bord.

Comme préliminaire, nous démontrons la densité pour les champs qui sont des gradients de fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème. *L'espace $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans l'espace*

$$W(\Omega) = \Big\{\chi \in H^1(\Omega);\ \chi|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega)\Big\}. \tag{1}$$

Démonstration: L'ouvert Ω, étant à frontière lipschitzienne, est réunion finie d'ouverts étoilés Ω_k, $1 \le k \le K$. On introduit une partition de l'unité formée de fonctions α_k de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, à support contenu dans $\overline{\Omega}_k$. On peut alors utiliser sur chaque Ω_k des coordonnées sphériques θ_k dans $\mathbb{S}_{d-1}$ (la sphère-unité de $\mathbb{R}^{d-1}$) et r_k, $0 \le r_k < R_k(\theta_k)$, où l'application

R_k est lipschitzienne de $\mathbb{S}_{d-1}$ dans $]0,+\infty[$ (la frontière $\partial\Omega_k$ correspond à $r_k = R_k(\theta_k)$). Finalement, on note Θ_k la partie ouverte de $\mathbb{S}_{d-1}$ correspondant à $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega$.
Soit maintenant χ une fonction quelconque de $W(\Omega)$. Dans chaque Ω_k, on définit une fonction χ_k par $\chi_k(r_k,\theta_k) = \chi(R_k(\theta_k),\theta_k)$, pour $\theta_k \in \Theta_k$. Sans changement de notation, on la multiplie par une fonction de troncature de classe $\mathscr{C}^\infty$ dépendant de r_k, égale à 1 au voisinage de $r_k = R_k(\theta_k)$ et s'annulant au voisinage de $r_k = 0$. La fonction $\chi_0 = \sum_{k=1}^K \alpha_k\,\chi_k$ est alors définie sur un voisinage de $\partial\Omega$, on la prolonge à Ω en multipliant par une fonction de troncature β de classe $\mathscr{C}^\infty$. Les deux fonctions $\beta\,\chi_0$ et $\chi - \beta\,\chi_0$ appartiennent à $H^1(\Omega)$. De plus, comme $\chi - \beta\,\chi_0$ s'annule sur $\partial\Omega$, elle est la limite d'une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$. Il reste à approcher χ_0. Comme la fonction χ_k appartient à $H^1(\Theta_k)$, elle est la limite dans $H^1(\Theta_k)$ d'une suite $(\varphi_{nk})_n$ de $\mathscr{D}(\overline{\Theta}_k)$. On définit une fonction χ_{nk} par $\chi_{nk}(r_k,\theta_k) = \varphi_{nk}(\theta_k)$ et on la multiplie sans changement de notation par la même fonction de troncature que précédemment, s'annulant au voisinage de $r_k = 0$. La suite $(\chi_{n0})_n$, définie par: $\chi_{n0} = \beta\,\sum_{k=1}^K \alpha_k\,\chi_{nk}$ converge vers χ_0 dans $H^1(\Omega)$. Ceci termine la démonstration.

3. Le cas bidimensionnel.

Théorème. *L'espace $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^2$ est dense dans l'espace*

$$V(\Omega) = \Big\{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^2; \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau} \in L^2(\partial\Omega) \Big\}. \tag{2}$$

Démonstration: Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction quelconque de $V(\Omega)$. On prouve le résultat en trois étapes.
1) Tout d'abord, on note Γ_i, $0 \le i \le I$, les composantes connexes de $\partial\Omega$. Puis, pour $0 \le i \le I$, on introduit une fonction μ_i de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ égale à 1 dans un voisinage de Γ_i et à zéro dans un voisinage des autres composantes connexes de $\partial\Omega$. On définit alors la fonction φ_i par

$$\varphi_i = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Gamma_i)}\,\Big(\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,d\tau\Big)\,\mu_i. \tag{3}$$

2) Maintenant, on fixe un point sur chaque Γ_i, $0 \le i \le I$, de coordonnée tangentielle a_i. La fonction g définie sur chaque Γ_i par

$$g(\tau) = \int_{a_i}^{\tau} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau} - \varphi_i)\,ds, \tag{4}$$

appartient à $H^1(\partial\Omega)$. On considère ensuite le problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta\chi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \chi = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Son unique solution χ appartient à l'espace $W(\Omega)$ introduit dans le théorème précédent. C'est donc la limite dans $W(\Omega)$ d'une suite $(\chi_n)_n$ de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$. Ainsi la suite $(\mathbf{grad}\,\chi_n)_n$ tend vers $\mathbf{grad}\,\chi$ dans $V(\Omega)$.

3) La fonction $\boldsymbol{v} - \mathbf{grad}\ \chi - \sum_{i=0}^{I} \varphi_i$ appartient à $V(\Omega)$ et a une trace tangentielle nulle sur $\partial\Omega$. C'est donc la limite dans $H(\mathrm{rot}, \Omega)$ (espace des fonctions de $L^2(\Omega)^2$ à rotationnel dans $L^2(\Omega)$) d'une suite $(\boldsymbol{w}_n)_n$ de $\mathscr{D}(\Omega)^2$ (*cf.* [2, Chapter I, Thm 2.12]).
Finalement, la suite $(\boldsymbol{w}_n + \mathbf{grad}\ \chi_n + \sum_{i=0}^{I} \varphi_i)_n$ de fonctions de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^2$ converge vers $\boldsymbol{v}$ dans $V(\Omega)$, ce qui termine la démonstration.

4. Le cas tridimensionnel.

Les arguments de la démonstration sont plus techniques que ceux du cas bidimensionnel et utilisent certaines propriétés prouvées dans [1]. On commence par un résultat préliminaire.

Proposition. *L'espace $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$ est dense dans l'espace*

$$V^*(\Omega) = \Big\{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3,\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \in L^2(\partial\Omega)^2 \text{ et } \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \,\mathrm{sur}\, \partial\Omega\Big\}. \tag{6}$$

Démonstration: Sans restriction, on suppose le domaine Ω simplement connexe (s'il ne l'est pas, il est la réunion d'un nombre fini d'ouverts simplement connexes à frontière lipschitzienne et on sait réduire le problème au cas simplement connexe au moyen d'une partition de l'unité). Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction quelconque de $V^*(\Omega)$. On introduit les espaces

$$\begin{aligned} X_T(\Omega) &= \Big\{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3,\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\Big\}, \\ K_T(\Omega) &= \Big\{\boldsymbol{v} \in X_T(\Omega); \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0 \,\mathrm{dans}\, \Omega\Big\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Puis on résout le problème: trouver $\boldsymbol{\zeta}$ dans $K_T(\Omega)$ tel que

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in K_T(\Omega), \quad \int_\Omega \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \big(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big)\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

L'ellipticité du membre de gauche est une conséquence de [1, Cor. 3.16], donc le problème admet une solution unique. Maintenant soit $\boldsymbol{\psi}$ une fonction quelconque de $X_T(\Omega)$. Si θ désigne la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\theta = -\mathrm{div}\ \boldsymbol{\psi} & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n\theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

la fonction $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} - \mathbf{grad}\ \theta$ appartient à $K_T(\Omega)$, elle peut donc être utilisée dans (8). En outre, comme l'intégrale du produit $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\ \theta$ est égale à zéro grâce à la condition de nullité de $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$, l'équation (8) est aussi vérifiée avec $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{grad}\ \theta$, donc avec toutes les fonctions $\boldsymbol{\psi}$ de $X_T(\Omega)$. Cela signifie que $\boldsymbol{\zeta}$ est solution du système

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\zeta} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\zeta}) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'idée consiste maintenant à écrire $\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\zeta} + (\boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\zeta})$. En effet:
1) Puisque $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\zeta}$ a son rotationnel nul c'est le gradient d'une fonction χ, qui est donc dans $W(\Omega)$. Il existe alors une suite $(\chi_n)_n$ de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ qui converge vers χ dans $W(\Omega)$, de sorte que la suite $(\mathbf{grad}\ \chi_n)_n$ converge vers $\mathbf{grad}\ \chi$ dans $V^*(\Omega)$.
2) La fonction $\boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\zeta}$ appartient à $V^*(\Omega)$ et de plus a sa trace tangentielle nulle sur $\partial\Omega$. C'est donc la limite dans $H(\mathbf{rot}\,,\Omega)$ d'une suite $(\boldsymbol{w}_n)_n$ de $\mathscr{D}(\Omega)^3$ (*cf.* [2, Chapter I, Thm 2.12]).
Finalement, la suite $(\boldsymbol{w}_n + \mathbf{grad}\ \chi_n)_n$, qui est dans $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$, converge vers $\boldsymbol{v}$ dans $V^*(\Omega)$, ce qui termine la démonstration.

Il reste donc à supprimer la condition supplémentaire de nullité sur la trace normale du rotationnel.

Théorème. *L'espace $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$ est dense dans l'espace*

$$V(\Omega) = \Big\{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \in L^2(\partial\Omega)^2\Big\}. \tag{10}$$

Démonstration: On suppose maintenant, sans restriction, le domaine Ω à frontière connexe. Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction quelconque de $V(\Omega)$. On observe tout d'abord que le problème: trouver μ dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$\forall\lambda \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \mathbf{grad}\ \mu \cdot \mathbf{grad}\ \lambda\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\ \lambda\, d\boldsymbol{x}, \tag{11}$$

a une solution μ, unique à une constante additive près, et qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta\mu = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n\mu = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

D'après [1, Lemme 3.5], comme $\mathbf{grad}\ \mu$ est à divergence nulle, il existe une fonction $\boldsymbol{\xi}$ de $H^1(\Omega)^3$ vérifiant: $\mathbf{grad}\ \mu = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\xi}$. L'idée finale consiste à écrire $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}$. En effet, la fonction $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\xi}$ appartient maintenant à $V^*(\Omega)$, donc, grâce à la proposition précédente, elle est la limite d'une suite de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$. Et $\boldsymbol{\xi}$ est la limite d'une suite de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})^3$ dans $H^1(\Omega)^3$, donc dans $V(\Omega)$.

Références

[1] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault — Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains, à paraître dans *Math. Meth. Applied Sc.*

[2] V. Girault, P.-A. Raviart — *Finite Element Methods for the Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer–Verlag (1986).

[3] P.-A. Raviart, E. Sonnendrücker — A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations, *Numer. Math.* **73** (1996), 329–372.