Développements asymptotiques complets pour des coques faiblement courbées encastrées ou libres

Georgiana ANDREOIU[(1)], Monique DAUGE[(2)], Erwan FAOU[(2)]
(1) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
(2) IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France

Abstract. We study the asymptotics of the three-dimensional displacement field for linearly elastic shallow shells as their thickness tends to zero, for two sorts of lateral boundary conditions: clamped and free. Similarly to plates, see [7], the asymptotics consists of a regular part and boundary layers. The two-dimensional generators of the regular part are solutions of two-dimensional problems governed by an elliptic system in the sense of [1]. For the first term, we find again the limit exhibited in [5]. The asymptotics is justified by optimal error estimates at arbitrary order. The results of this Note are proven in [3].

Full Asymptotic Expansions for Clamped or Free Shallow Shells

Résumé. *Nous étudions le développement asymptotique du déplacement tri-dimensionnel d'une coque linéairement élastique faiblement courbée lorsque son épaisseur tend vers zéro, pour deux sortes de conditions sur le bord latéral : l'encastrement et le cas de la traction nulle. Similairement au cas des plaques, voir* [7]*, le développement consiste en une partie régulière et des couches limites. La partie régulière est engendrée par des déplacements bi-dimensionnels gouvernés par un système elliptique au sens de* [1]*. On retrouve comme premier terme celui exhibé dans* [5]*. Le développement complet est justifié par des estimations d'erreur optimales à tous ordres. Les résultats de cette Note sont démontrés dans* [3]*.*

Abridged english version. We consider a *shallow shell* as a domain of $\mathbb{R}^3$ defined like a surface thickened in its normal direction, and whose middle surface has curvatures of the same order as the thickness. We can show that for a given compact and connected surface S with boundary, embedded in $\mathbb{R}^3$, if its principal curvatures are small enough with respect to the intrinsic diameter of S, then the surface is given as a graph over a flat surface ω immersed in $\mathbb{R}^2$. Moreover, the height of the graph is of the order of the curvature.

Thus, we consider a three-dimensional shallow shell as an element of a family of domains of $\mathbb{R}^3$ indexed by ε, of the form $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\overline{\Omega}^\varepsilon)$, where $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ and

$$\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon \;:\; \overline{\Omega}^\varepsilon \ni (x_*, x_3^\varepsilon) = x^\varepsilon \longmapsto \hat{x}^\varepsilon = (x_*, \varepsilon\theta(x_*)) + x_3^\varepsilon \boldsymbol{n}\big((x_*, \varepsilon\theta(x_*))\big) \in \widehat{\Omega}^\varepsilon,$$

Note présentée par Philippe Ciarlet

where θ is a function over the manifold ω, and $\boldsymbol{n}$ the normal to the middle surface. We moreover assume that $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ is embedded in $\mathbb{R}^3$, thus it is a domain of the ambient space. If ω is embedded in $\mathbb{R}^2$, then ω is simply a domain of $\mathbb{R}^2$, and the previous application is a graph in the usual sense.

We suppose that $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ is made with a homogeneous and isotropic material, and we consider the equations of linear three-dimensional elasticity, with zero traction condition on the upper and lower faces. Moreover, we impose two kind of conditions on the lateral boundary: clamped or free.

Through the diffeomorphism $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$, there exist curvilinear coordinates (x_*, x_3^ε) on the shell $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ such that x_3^ε is the distance to the middle surface. Let (u_j^ε) and $(f^{i,\varepsilon})$ be the components of the displacement field and of the volumic forces applied to the shell in this coordinate system. In order to study the behavior of the displacement with respect to ε, we make the scaling $x^\varepsilon \to x = (x_*, x_3 = \frac{1}{\varepsilon} x_3^\varepsilon)$ which set the equations on the fixed manifold $\Omega = \omega \times (-1,1)$. Moreover, we do the following scaling on the unknowns (the same as for plates): $u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = u_\alpha(\varepsilon)(x)$, $\alpha = 1,2$, and $u_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} u_3(\varepsilon)(x)$. We also suppose that there exist $\boldsymbol{f} = (f^i) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$ such that $f^{\alpha,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^\alpha(x)$ et $f^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon f^3(x)$.

The principal result of this note is that under these assumptions, the displacement $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ defined on the manifold Ω admits an asymptotic development such that

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \|\boldsymbol{u}(\varepsilon)(x) - \sum_{k\geq 0}^{N} \big(\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}^k(x) + \boldsymbol{v}^k(x) + \chi(r)\boldsymbol{w}^k(\varepsilon^{-1}r, s, x_3)\big)\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{N+1/2},$$

where $\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}^k(x) = \big(\boldsymbol{\zeta}_*^k(x_*) - x_3 \nabla_* \zeta_3^k(x_*), \zeta_3^k(x_*)\big)$ are Kirchhoff-Love displacements on Ω whose generators $(\boldsymbol{\zeta}_*^k, \zeta_3^k)$ are determined by an elliptic operator $\boldsymbol{P}$ on ω described in section 5. The terms $\boldsymbol{v}^k$ are of zero mean value with respect to x_3, and the $\boldsymbol{w}^k$ are boundary layer terms exponentially decreasing with respect to the variable $T = \varepsilon^{-1} r$ (r denote the distance to the boundary of ω). This asymptotic is of the same type as for plates (see [7]).

1 Coques faiblement courbées

A toute coque $\widehat{\Omega}$ sont associées sa surface moyenne S et son épaisseur d : $\widehat{\Omega}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ des points x de la forme $y + h\boldsymbol{n}(y)$ où y parcourt S, h parcourt $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ et $\boldsymbol{n}$ désigne la normale unitaire à S au point y.

Réciproquement, supposons donnée une variété à bord S régulière et bornée. Soit $K_{\max}$ le maximum des valeurs absolues des courbures principales de S. Pour tout $d < 1/K_{\max}$, l'application qui à $(y,h) \in S \times (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ associe $y + h\boldsymbol{n}(y)$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ d'image $\widehat{\Omega}$. Dans cette situation, $\widehat{\Omega}$ est une *coque*. Nous dirons que $\widehat{\Omega}$ est une *coque faiblement courbée* si $K_{\max}$ satisfait une majoration du type $K_{\max} \leq Cd$ où C est une constante indépendante de d. On a l'énoncé suivant:

THÉORÈME 1.1. *Soit S une surface orientable, compacte et connexe avec bord, plongée dans $\mathbb{R}^3$. Soit $d(P,Q)$ la distance géodésique entre les deux points P et Q de S, et soit $D := \max_{P,Q\in S} d(P,Q)$ le diamètre intrinsèque de S. Alors si $K_{\max} \leq \frac{1}{2D}$, il existe*

$P_0 \in S$, tel que la projection orthogonale de S sur son plan tangent en P_0 permette la représentation de S comme graphe $\mathcal{C}^\infty$ au dessus d'une surface plate ω immergée dans $T_{P_0}S \subset \mathbb{R}^3$, à bord régulier. En notant ce graphe

$$\Theta \ : \ \omega \ni (x_*) \mapsto \big(x_*, \Theta(x_*)\big),$$

on a, pour une constante γ ne dépendant que de D les estimations

$$|\Theta| \leq \gamma K_{\max} \quad et \quad \|\nabla\Theta\| \leq \gamma K_{\max}. \tag{1}$$

On suppose que S satisfait $K_{\max} \leq Cd$. Alors pour d assez petit (c'est-à-dire inférieur à $1/2CD$) S satisfait les conditions du théorème. Il existe alors $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \rho < \rho_0$ l'image $\widehat{\Omega}$ de l'application

$$(x_*, h) \mapsto \big((x_*, \Theta(x_*)) + h\boldsymbol{n}(x_*, \Theta(x_*))\big) \quad \text{pour} \quad (x_*, h) \in \omega \times (-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}),$$

est un ouvert plongé de $\mathbb{R}^3$.

On suppose de plus que $\rho_0 > d$. Vu la condition $K_{\max} \leq Cd$ et les majorations (1), on peut normaliser Θ par l'épaisseur et écrire $\Theta = \frac{d}{2}\theta$ où θ est une fonction sur ω.

Il est ainsi naturel de considérer une telle coque comme élément de la famille de coques faiblement courbées paramétrées par leur demi-épaisseur $\varepsilon > 0$, voir [6], $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\overline{\Omega}^\varepsilon)$, où $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ et

$$\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon \ : \ \overline{\Omega}^\varepsilon \ni (x_*, x_3^\varepsilon) = x^\varepsilon \longmapsto \hat{x}^\varepsilon = (x_*, \varepsilon\theta(x_*)) + x_3^\varepsilon \boldsymbol{n}\big((x_*, \varepsilon\theta(x_*))\big) \in \widehat{\Omega}^\varepsilon. \tag{2}$$

Le bord latéral de $\overline{\Omega}^\varepsilon$ est l'image de $\partial\omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ par $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$. Enfin, pour ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$, on retrouve la définition de [6].

2 Problème tri-dimensionnel

On considère une famille de coques faiblement courbées $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ comme définies en (2), consitituées d'un matériau homogène et isotrope caractérisé par les constantes de Lamé $\lambda, \mu > 0$. Le tenseur de rigidité associé est $A^{ijkl} = \lambda\delta^{ij}\delta^{kl} + \mu(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})$. Pour une famille de chargements $\hat{\boldsymbol{f}}^\varepsilon$ définis sur $\widehat{\Omega}^\varepsilon$, nous nous intéressons au déplacement tridimensionnel $\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon$ solution de

$$\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \quad \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} A^{ijkl} \hat{e}_{ij}(\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon)\, \hat{e}_{kl}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\hat{x}^\varepsilon = \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \hat{\boldsymbol{f}}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\hat{x}^\varepsilon, \tag{3}$$

où $\hat{e}_{ij}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ est le tenseur linéarisé des déformations standard dans les coordonnées $\hat{x}^\varepsilon$ et l'espace variationnel $\boldsymbol{V}$ est l'espace des déplacements à composantes H^1 dans le cas libre, et s'annulant en plus sur le bord latéral dans le cas encastré. Dans le cas encastré, il existe une unique solution au problème (3). Dans le cas libre, le chargement doit vérifier une condition d'orthogonalité envers les déplacements rigides pour qu'une solution existe et d'autre part l'unicité de cette solution est aussi assurée par une condition d'orthogonalité envers les déplacements rigides.

Supposant que les chargements $\hat{\boldsymbol{f}}^\varepsilon$ admettent un développement asymptotique quand $\varepsilon \to 0$, on se propose d'analyser les réponses $\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon$.

3 Coordonnées curvilignes et changement d'échelle

Pour $i = 1, 2, 3$ et $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ on note $\boldsymbol{g}_i^\varepsilon$ le vecteur défini par $\boldsymbol{g}_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon}(x^\varepsilon)$. En chaque point $(\boldsymbol{g}_i^\varepsilon)$ forme une *base covariante* de l'espace tangent à $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ en ce point, et la base duale $(\boldsymbol{g}^{j,\varepsilon})$ définie par $\boldsymbol{g}_i^\varepsilon \cdot \boldsymbol{g}^{j,\varepsilon} = \delta_i^j$ est la *base contravariante* associée, voir [4].

Les composantes en coordonnées curvilignes de l'inconnue $\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon$ sont les fonctions u_i^ε définies sur Ω^ε par l'égalité $\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon) = u_j^\varepsilon\, g^{j,\varepsilon}(x^\varepsilon)$. Par contre, les composantes en coordonnées curvilignes du chargement $\hat{\boldsymbol{f}}^\varepsilon$ sont les fonctions $f^{i,\varepsilon}$ définies sur Ω^ε par l'égalité $\hat{\boldsymbol{f}}^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon) = f^{i,\varepsilon}\, g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)$.

A chaque point $x^\varepsilon = (x_*, x_3^\varepsilon) \in \Omega^\varepsilon$ on associe un point dans la variété fixe $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ par $x^\varepsilon \to x = (x_*, x_3 = \frac{1}{\varepsilon} x_3^\varepsilon)$. On fait également une mise à l'échelle de l'inconnue (identique à celle des plaques) :

$$u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = u_\alpha(\varepsilon)(x),\ \alpha = 1, 2, \quad u_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} u_3(\varepsilon)(x), \tag{4}$$

et on suppose qu'il existe $\boldsymbol{f} = (f^i) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$ tel que $f^{\alpha,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^\alpha(x)$ et $f^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon f^3(x)$. Comme le problème est linéaire, par superposition cette hypothèse permet de traiter les cas où les composantes $f^{i,\varepsilon}$ des chargements admettent un développement asymptotique du type $\sum_k \varepsilon^k f^{i,k}(x)$, ce qui est une hypothèse intrinsèque, c'est-à-dire indépendante du système de coordonnées curvilignes ou cartésiennes choisies, voir [2]. Introduisant $\boldsymbol{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$, on obtient que $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ est la solution dans $\boldsymbol{V}(\Omega)$ de

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega), \quad \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon) e_{i\|j}(\varepsilon; \boldsymbol{u}(\varepsilon)) e_{k\|l}(\varepsilon; \boldsymbol{v}) \sqrt{\det \boldsymbol{g}(\varepsilon)}\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f^i v_i \sqrt{\det \boldsymbol{g}(\varepsilon)}\, \mathrm{d}x, \tag{5}$$

où $\boldsymbol{V}(\Omega)$ est défini comme au paragraphe précédent et $A^{ijkl}(\varepsilon)$, $e_{i\|j}(\varepsilon)$, et $\boldsymbol{g}(\varepsilon)$ sont les expressions en coordonnées curvilignes mises à l'échelle des tenseurs de rigidité, des déformations et métrique. On peut montrer que $A^{ijkl}(\varepsilon) = \lambda\delta^{ij}\delta^{kl} + \mu(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\boldsymbol{g}(\varepsilon) = \mathrm{Id} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et

$$\begin{array}{rcl} e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \boldsymbol{v}) & = & e_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) - \partial_{\alpha\beta}\theta\, v_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ e_{\alpha\|3}(\varepsilon; \boldsymbol{v}) & = & \varepsilon^{-1} e_{\alpha 3}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ e_{3\|3}(\varepsilon; \boldsymbol{v}) & = & \varepsilon^{-2} e_{33}(\boldsymbol{v}), \end{array} \tag{6}$$

où e_{ij} est le tenseur des déformations en variables x^ε.

4 Développement asymptotique

Pour décrire les termes de couches limites qui apparaissent près du bord latéral, on introduit un système de coordonnées (r, s) dans un voisinage du bord $\partial\omega$ et on utilise l'indice n (s) pour indiquer la composante normale (tangentielle) d'un vecteur. D'autre part, on sépare les composantes et le gradient dans les variables plane et verticale: $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_*, \zeta_3)$ et $\nabla = (\nabla_*, \partial_3)^T$. Comme dans le cas des plaques [7], le développement asymptotique $\sum_k \varepsilon^k \boldsymbol{u}^k$ de $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ comprend trois types de termes pour chaque $k \geq 0$:

1. des champs de Kirchhoff-Love $\boldsymbol{u}_{\mathrm{KL}}^k(x) = \big(\boldsymbol{\zeta}_*^k(x_*) - x_3 \nabla_* \zeta_3^k(x_*), \zeta_3^k(x_*)\big)$, générés par les champs plans $\boldsymbol{\zeta}^k = (\boldsymbol{\zeta}_*^k, \zeta_3^k)$,

2. des déplacements $\boldsymbol{v}^k(x)$ à moyenne transverse nulle: $\forall x_* \in \omega$, $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{v}^k(x_*, x_3)\,\mathrm{d}x_3 = 0$,
3. des profils $\boldsymbol{w}^k(t, s, x_3)$ à décroissance exponentielle quand $t \to \infty$,

et avec $\chi(r)$ une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage du bord $\partial\omega$, $\boldsymbol{u}^k$ est défini par

$$\boldsymbol{u}^k(x, \varepsilon^{-1}r) = \boldsymbol{u}^k_{\mathrm{KL}}(x) + \boldsymbol{v}^k(x) + \chi(r)\boldsymbol{w}^k(\varepsilon^{-1}r, s, x_3). \tag{7}$$

THÉORÈME 4.1. *Pour le déplacement $\boldsymbol{u}(\varepsilon) \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ provenant de la solution de (3), il existe pour tout $k \geq 0$ des champs de Kirchhoff-Love $\boldsymbol{u}^k_{\mathrm{KL}}$, des déplacements à moyenne nulle $\boldsymbol{v}^k$ et des profils $\boldsymbol{w}^k$ tels que pour $\boldsymbol{u}^k$ défini par (7), on ait pour tout $N \geq 0$ l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}(\varepsilon)(x) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \boldsymbol{u}^k(x, \frac{r}{\varepsilon})\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

avec C une constante positive indépendante de ε. De plus, $\boldsymbol{w}^0 = 0$, $w^1_3 = 0$, $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}^1 = 0$.

Pour chaque $k \geq 0$, les générateurs $\boldsymbol{\zeta}^k$ des champs de Kirchhoff-Love sont solutions de problèmes aux limites bi-dimensionnels sur ω que nous décrivons maintenant.

5 Problèmes bi-dimensionnels

Notons $\tilde{\lambda} = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$ le coefficient de Lamé homogénéisé et $b^{\alpha\beta\sigma\tau} = \tilde{\lambda}\,\delta^{\alpha\beta}\delta^{\sigma\tau} + \mu(\delta^{\alpha\sigma}\delta^{\beta\tau} + \delta^{\alpha\tau}\delta^{\beta\sigma})$ le tenseur bi-dimensionnel de rigidité associé. Les problèmes sur ω sont gouvernés par la forme bilinéaire

$$a(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = \int_\omega b^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(\tilde{e}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})\,\tilde{e}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\eta}) + \tfrac{1}{3}\partial_{\alpha\beta}\zeta_3\,\partial_{\sigma\tau}\eta_3\big)\,\mathrm{d}x_*, \tag{9}$$

où $\tilde{e}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta})$ est le tenseur bidimensionnel défini par $\tilde{e}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) = e_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) - \partial_{\alpha\beta}\theta\,\zeta_3$. L'opérateur intérieur $\boldsymbol{P} = (P_i)$ correspondant à (9) est donné par

$$\begin{aligned} P_\gamma\boldsymbol{\zeta} &= -\tilde{\lambda}\,\partial_\gamma\tilde{e}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\zeta}) - 2\mu\,\partial_\sigma\tilde{e}_{\sigma\gamma}(\boldsymbol{\zeta}),\\ P_3\boldsymbol{\zeta} &= \tfrac{1}{3}(\tilde{\lambda} + 2\mu)\Delta^2\zeta_3 - \tilde{\lambda}\Delta\theta\,\tilde{e}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\zeta}) - 2\mu\partial_{\alpha\beta}\theta\,\tilde{e}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}). \end{aligned} \tag{10}$$

Dans le système local de coordonnées, les traces Dirichlet sur $\partial\omega$ sont $(\zeta_n, \zeta_s, \zeta_3, \partial_n\zeta_3)$ et les traces de Neumann sont données par

$$\begin{aligned} T_n(\boldsymbol{\zeta}) &= \tilde{\lambda}\,\mathrm{div}_*\,\zeta_* + 2\mu\partial_n\zeta_n - \zeta_3\big((\tilde{\lambda} + 2\mu)\partial_{nn}\theta + \tilde{\lambda}(\partial_{ss}\theta - \kappa\partial_n\theta)\big),\\ T_s(\boldsymbol{\zeta}) &= \mu\big(\partial_n\zeta_s + \partial_s\zeta_n + 2\kappa\zeta_s - 2\zeta_3(\partial_{ns}\theta + \kappa\partial_s\theta)\big),\\ M_n(\zeta_3) &= \tfrac{1}{3}\big(\tilde{\lambda}\Delta_*\zeta_3 + 2\mu\partial_{nn}\zeta_3\big),\\ N_n(\zeta_3) &= -\tfrac{1}{3}\big((\tilde{\lambda} + 2\mu)\partial_n(\Delta_*\zeta_3) + 2\mu\partial_s(\partial_r + \kappa)\partial_s\zeta_3\big), \end{aligned} \tag{11}$$

où κ désigne la courbure de $\partial\omega$. L'opérateur $\boldsymbol{P}$ est elliptique de multi-degré $(4, 2, 2)$ au sens d'Agmon, Douglis & Nirenberg [1] et les conditions de Dirichlet ou de Neumann le recouvrent.

Dans le cas des coques encastrées, pour chaque $k \geq 0$ le problème bi-dimensionnel est du type

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}^k &= \boldsymbol{r}^k \quad \text{dans} \quad \omega,\\ (\zeta^k_r, \zeta^k_s, \zeta^k_3, \partial_n\zeta^k_3) &= \boldsymbol{h}^k \quad \text{sur} \quad \partial\omega, \end{aligned} \tag{12}$$

avec un membre de droite dépendant des pas précédents et avec les traces de Dirichlet dictées de façon à ce que les couches limites aient une décroissance exponentielle à l'infini (comme dans le cas des plaques). On retrouve, voir [5], que $\boldsymbol{r}^0 = \frac{1}{2}(p^1, p^2, \partial_\alpha q^\alpha + p^3)$ et $\boldsymbol{h}^0 = (0,0,0,0)$ avec $p^k(x_*) = \int_{-1}^1 f^k(x_*, x_3)\,\mathrm{d}x_3$ et $q^k(x_*) = \int_{-1}^1 x_3 f^k(x_*, x_3)\,\mathrm{d}x_3$.

Dans le cas de la traction nulle, pour chaque $k \geq 0$ le problème bi-dimensionnel est du type

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}^k & = & \boldsymbol{r}^k & \text{dans} \quad \omega, \\ \big(T_n(\boldsymbol{\zeta}^k), T_s(\boldsymbol{\zeta}^k), N_n(\zeta_3^k), M_n(\zeta_3^k)\big) & = & \boldsymbol{g}^k & \text{sur} \quad \partial\omega, \end{array} \tag{13}$$

pour des traces de Neumann dictées, comme dans le cas de l'encastrement, par les conditions sur le contrôle des couches limites à l'infini. On calcule $\boldsymbol{g}^0 = (0, 0, -\frac{1}{2} n_\alpha q^\alpha, 0)$ avec (n_1, n_2) la normale unitaire extérieure à $\partial\omega$. Si $\boldsymbol{g}^k = (g_n^k, g_s^k, g_3^k, g_m^k)$ et si on définit $g_1^k = n_1 g_n^k + n_2 g_s^k$ et $g_2^k = n_2 g_n^k - n_1 g_s^k$, l'existence d'une solution de (13) est assurée si la *condition de compatibilité* suivante est satisfaite

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in \ker \boldsymbol{P}, \quad \int_\omega \boldsymbol{r}^k \boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}x_* + \int_{\partial\omega} g_i^k \eta_i\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\omega} g_m^k \partial_n \eta_3\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{14}$$

Des raisonnements similaires à [7] permettent de vérifier cette condition en utilisant la condition de compatibilité venant du problème tri-dimensionnel. On prend alors la solution de (13) orthogonale à $\ker \boldsymbol{P}$.

Références

[1] S. Agmon, A. Douglis & L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* **17**, 35–92.

[2] G. Andreoiu, Comparaison entre modèles bidimensionnels de coques faiblement courbées. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **329**, (1999), 339–342.

[3] G. Andreoiu, E. Faou, *Asymptotics of arbitrary order for clamped and free shallow shells*. En préparation.

[4] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol III : Theory of Shells*, North Holland, Amsterdam, à paraître.

[5] S. Busse, P.G. Ciarlet & B. Miara, Justification d'un modèle linéaire bi-dimensionnel de coques faiblement courbées en coordonnées curvilignes, *Modél. Math. Anal. Numér.* **31**, (1997), 409–434.

[6] P.G. Ciarlet & J.C. Paumier, A justification of the Marguerre-von Kármán equations. *Computational Mechanics* **1**, (1986), 177–202.

[7] M. Dauge, I. Gruais & A. Rössle, The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. To appear in *SIAM Jour. of Math. Anal.* (1999).