Feuille d'exercices # 4
Indépendance

Exercice 1 *Sommes de v.a. indépendantes*
Soit les variables aléatoires indépendantes X et Y. Calculer la loi de la somme $X+Y$ lorsque :

1. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.
3. $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(n,\tau^2)$.
4. $X \sim \gamma(p,\lambda)$ et $Y \sim \gamma(q,\lambda)$. Quelle est la loi de X^2+Y^2 quand $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Généraliser pour d variables.

Exercice 2 *Somme, min et max de v.a. uniformes*
Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{U}(1,2,\ldots,n)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.
2. Trouver la loi de $X+Y$.
3. On pose $U=\min\{X,Y\}$ et $V=\max\{X,Y\}$. Trouver les lois de (U,V), U et V. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 *Premier et deuxième succès*
Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{G}(p)$, $0<p<1$. On pose $U=\min\{X,Y\}$ et $W=\max\{X,Y\}-U$. Trouver les lois de U et W et étudier leur indépendance.

Exercice 4 *Ponctualité*
Deux personnes ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles : les instants X et Y de leur arrivées sont deux variables aléatoires indépendantes uniformément répartis dans [14,15]. Calculer la loi de la variable T durée d'attente du premier arrivé.

Exercice 5 *Triplet de v.a. i.i.d.*
Soit F une fonction de répartition de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Si X a la fonction de répartition F, montrer que X admet une densité.
2. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi. Montrer que $\mathbb{P}(X=Y)=0$ et que $\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{2}$. Montrer que (X,Y) et (Y,X) ont la même loi.
3. Soit Z encore une variable aléatoire indépendante de (X,Y) et de même loi que X. Calculer $\mathbb{P}(X<Y<Z)$ et montrer que la valeur ne depend pas de F. Montrer que (X,Y,Z) et (Y,Z,X) ont la même loi.
4. Généraliser au cas de n variables aléatoires indépendantes de même loi.

Exercice 6 *Encore autour de min et max de v.a.i.i.d.*
Soient $X_1,\ldots,X_n$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On note $U=\min_{1\le j\le n} X_j$ et $V=\max_{1\le j\le n}$.

1. Calculer les fonction de répartition de U et V à l'aide de la fonction de répartition commune des X_j.
2. Si la loi commune des X_j admet une densité, montrer que U et V admettent des densités et les calculer.

Exercice 7 *Somme de v.a. uniformes*
Soit $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ indépendante de $Y \sim \mathcal{U}(0, 1, \ldots, n)$. Trouver la loi de $X + Y$ et calculer de deux façons l'espérance de $X + Y$.

Exercice 8 *Produit de deux v.a.*
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes dont les densités sont

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \ f_Y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{]0,\infty[}.$$

Trouver la loi de XY.

Exercice 9 *Points aléatoires dans le plan*

1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note $U = \cos\theta X - \sin\theta Y$ et $V = \sin\theta X + \cos\theta Y$. Trouver la loi de (U, V) et de ses marginales. U, V sont-elles indépendantes ?
2. Soient R et Θ deux variables aléatoires indépendantes telles que $\Theta \sim \mathcal{U}_{[0,2\mathbb{P}i]}$ et $R > 0$ avec $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$. On note $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Trouver leurs lois et étudier leur indépendance.

Exercice 10 *Loi beta*
Soient $a, b > 0$. Désignons par Z_a, Z_b deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\gamma(a, 1)$, $\gamma(b, 1)$.

1. Trouver la densité du vecteur aléatoire

$$(U, V) := \left(Z_a + Z_b, \frac{Z_a}{Z_a + Z_b}\right).$$

2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? (On dit que V suit une loi de $\mathrm{B}(a, b)$.)

Exercice 11 *Loi de Cauchy et loi arcsinus*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. Montrer que la variable aléatoire $C = X/Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
2. Soit $V \sim \mathrm{B}(1/2, 1/2)$ une variable aléatoire de loi arcsinus. Prouver que la variable aléatoire $1/V$ a la même loi que la variable aléatoire $1+C^2$, où C suit une loi de Cauchy de paramètre 1.