Proposition | Si E et F deux espaces métriques séparables on a
$\mathcal{B}(E \times F) = \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(F)$

Démo $\mathcal{B}(E \times F) \supset \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(F)$ vraie car les projection π_x et π_y sont continues donc mesurables pour $\mathcal{B}(E \times F)$

(pas besoin de séparabilité)

Soit (x_k) suite dense dans E, soit $\{U_n : n \geq 1\}$ suite de boules ouvertes de rayons les rationnels $(r_n : n \geq 1)$ centrées dans un x_k. On fait pareil pour F, soit $\{V_m : m \geq 1\}$ la suite de boules ouvertes. Pour tout ouvert $\mathcal{W}$ de $E \times F$ et tout $(x,y) \in \mathcal{W}$ on sait que $\mathcal{W}$ contient un ouvert $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ ouvert de E, $\mathcal{V}$ ouvert de F contenant resp x et y. Alors $\mathcal{W}$ doit être reunion d'une sous-famille $\{U_n \times V_m,\ n, m \geq 1\}$. Donc tout ouvert de $E \times F$ est mesurable pour $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(F)$ et on déduit
$\mathcal{B}(E \times F) \subset \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(F)$ ■