

FEUILLE D'EXERCICES # 1
Rappels sur les tribus, classes monotones

Exercice 1 *Tribus images*

Soient X et Y des ensembles et f une application de X dans Y .

1. Montrer que si \mathcal{G} est une tribu sur Y , $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(G), G \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur X .
2. Montrer que si \mathcal{F} est une tribu sur X , $\mathcal{G} := \{A \subset Y, f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y .
3. Montrer que pour toute partie $\mathcal{C} \subset Y$, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Exercice 2 *Classes monotones et tribus*

1. Une union de tribus est-elle une tribu? Une union croissante de tribus est-elle une tribu? Si non, donner un/des contre-exemples.
2. Montrer qu'une classe monotone \mathcal{M} est une tribu si et seulement si \mathcal{M} est stable par intersection.

Exercice 3 *Cardinal d'une tribu*

Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. Pour tout $x \in E$, on définit l'atome de la tribu \mathcal{E} engendré par x par

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{E}, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de \mathcal{E} forment une partition de E .
2. Montrer que si \mathcal{E} est au plus dénombrable alors \mathcal{E} contient ses atomes et que chaque élément de \mathcal{E} s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.

Exercice 4 *Tribu engendrée*

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Déterminer la tribu $\sigma(\{A, B, C\})$ où $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \emptyset$.

Exercice 5 *Version fonctionnelle du théorème de classes monotones*

Soit H un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur un ensemble Ω et soit \mathcal{E} une famille stable par intersection contenant Ω . On suppose que

1. $\forall A \in \mathcal{E}, \mathbf{1}_A \in H$,
2. Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives de H convergeant vers une fonction f bornée, alors $f \in H$.

Montrer que H contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{E})$ -mesurables.