LICENCE 3 Mathématiques 2007-2008
Espaces vectoriels normés
2. Espaces $B(E,F)$, $E^\star$ et théorèmes de Banach

2.1. Soit E un e.v.n. et soit $T \in B(E,E)$. L'ensemble de tous les opérateurs $S \in B(E,E)$ est-il sous-espace vectoriel de $B(E,E)$ si

i) $TS = 0$;

ii) $TS = ST$?

2.2. Soient $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ et $T \in B(E,F)$ avec E, F espaces de Banach. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ pour tout $x \in M$ où M est un sous-espace vectoriel dense dans E. Est-il vrai que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ pour tout $x \in E$? *Indication :* non ; $E = F = \ell_2$, $T_n x = T_n(u_j) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, nu_n, u_{n+1}, \ldots)$ $T = I$ et $M = c_{00}$.

2.3. Soit $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ avec E, F espaces de Banach. Supposons que $\{T_n x\}_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $T \in B(E,F)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ pour tout $x \in E$.

2.4. Soit $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ avec E, F e.v.n. Supposons que $\{T_n x\}_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (dans F). Est-ce $T_n \to 0$ (dans $B(E,F)$) ? *Indication :* non ; $E = F = \ell_2$, $T_n x = T_n(u_j) = (0, 0, \ldots, 0, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)$.

2.5. Soit l'espace ℓ_2 et les suites d'opérateurs $T_n x = T_n(u_j) = (0, 0, \ldots, 0, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)$ et $S_n x = S_n(u_j) = (u_1/n, u_2/n, \ldots)$. Étudier la convergence des suites $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$.

2.6. Soit $T : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que $Tx(t) = \int_0^t e^s x(s)ds$. On introduit la suite d'opérateurs $T_n : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tels que

$$T_n x(t) = \int_0^t \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{s^j}{j!} \right) x(s)ds, n \geqslant 1.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

2.7. Soit $T_n : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que $T_n x(t) = x(t^{1+1/n})$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ T_n est un operateur linéaire borné et que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - x\|_\infty = 0$ pour tout $x \in \mathrm{C}([0,1])$. Est-ce que $T_n \to I$ (dans l'espace $B(\mathrm{C}([0,1]), \mathrm{C}([0,1]))$? *Indication :* non.

2.8. Soit E un espace de Banach et $T \in B(E,E)$. On suppose que la série entière $\varphi(t) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$ $(a_j \in \mathbb{R})$ converge sur $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer que la suite $T_n = \sum_{j=0}^{n} a_j T^j$ admet une limite $\varphi(T) \in B(E,E)$.

2.9. Soit E un espace de Banach et $T \in B(E,E)$. Montrer que $\|e^T\| \leqslant e^{\|T\|}$. Calculer e^I, où I est l'opérateur identité.

2.10. Soit E un espace de Banach et $T \in B(E,E)$. On suppose qu'il existe une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et que $Tx_n \to 0$ dans E. Montrer que l'inverse borné de T n'existe pas. *Indication :* utiliser l'exercice **1.28**.

2.11. Soit $E = \{x \in \mathrm{C}^1([0,1]) : x(0) = 0\}$ où $\mathrm{C}^1([0,1])$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère $T : E \to \mathrm{C}([0,1])$ défini par

$$Tx(t) = x'(t) + a(t)x(t), \quad a \in \mathrm{C}([0,1]).$$

Montrer que l'inverse borné T^{-1} existe.

2.12. Soit $T : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que

$$Tx(t) = x(t) + \int_0^t x(s)ds.$$

Montrer que $N(T) = 0$. Montrer que l'inverse borné T^{-1} existe et le calculer.

2.13. Soient $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ et $T \in B(E,F)$ avec E, F espaces de Banach. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$, pour tout $x \in E$, qu'ils existent $T_n^{-1} \in B(F,E)$ et que $R(T) = F$. Montrer que les solutions de l'équation $T_n x_n = y$ convergent vers la solution de $Tx = y$ ($y \in F$ arbitraire) ssi $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n^{-1}\| < \infty$. *Indication :* montrer que si $\|T_n^{-1}\| < c$, $T_n x_n = y$ et $Tx = y$ alors $x_n \to x$; dans l'autre sens, montrer que la suite $x_n = T_n^{-1} y$ est bornée et utiliser le principe de la borne uniforme.

2.14. Soient E, F des e.v.n.

i) Montrer que si $T \in B(E,F)$ alors T est un opérateur fermé (c'est-à-dire que son graphe $G(T)$ est fermé).

ii) Montrer que si $T \in L(E,F)$ est un opérateur fermé et si T^{-1} existe, alors T^{-1} est aussi un opérateur fermé.

2.15. Soit $T : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que

i) $Tx(t) = x(t)/t$ et $D(T) = \{x \in \mathrm{C}([0,1]) : \exists \lim_{t\downarrow 0} x(t)/t\}$;

ii) $Tx(t) = x'(t)$ et $D(T) = \{x \in \mathrm{C}^1([0,1]) : x(0) = 0\}$.

Montrer que dans les deux cas T est fermé. *Indication :* montrer que T^{-1} existe et est borné et utiliser la deuxième partie de l'exercice précédent.

2.16. Soit $T \in L(E,F)$ avec E, F e.v.n. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) T envoie tout ouvert de E dans un ouvert de F (T application ouverte) ;

ii) $\exists \delta > 0$ tel que $B_F(0,\delta) \subset T(B_E)$;

iii) $\exists M > 0$ telle que pour tout $y \in F$ il existe $x \in T^{-1}(\{y\})$ satisfaisant $\|x\|_E \leqslant M\|y\|_F$.

2.17. Soit $T \in B(E,F)$ avec E, F e.v.n. Montrer que si E est complet et si T est une application ouverte, alors F est complet. *Indication :* utiliser iii) de l'exercice précédent ainsi que l'exercice **1.6**.

2.18. Soit $T \in B(E,F)$ avec E, F espaces de Banach. Il y a équivalence entre :

i) $T(E)$ est fermé ;

i) $T : E \to T(E)$ est une application ouverte ;

iii) $\exists M > 0$ telle que pour tout $y \in T(E)$ il existe $x \in T^{-1}(\{y\})$ satisfaisant $\|x\|_E \leqslant M\|y\|_F$.

Indication : utiliser le principe de l'application ouverte, l'exercice **2.4** iii) et enfin, appliquer l'exercice **1.28** à l'opérateur linéaire borné (le justifier !) $S : E/N(T) \to T(E)$, $S(x+N(T)) = T(x)$.

2.19. Soit l'espace $E = \mathrm{C}^1([0,1])$ l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On muni E de la norme supremum $\|x\|_\infty := \sup_{s\in[0,1]} |x(s)|$. Soit l'opérateur $T : E \to \mathrm{C}([0,1])$ défini par $Tx = x'$. Montrer que T est linéaire et que son graphe $G(T)$ est fermé. Montrer que T n'est pas borné. Pourquoi le principe du graphe fermé ne s'applique pas ? *Indication :* si $\lim_{n\to\infty}(x_n, x'_n) = (x, x')$ dans $E \times \mathrm{C}([0,1])$, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} x'_n = x'$ uniformément sur $[0,1]$; trouver une suite $\{x_n\}$ bornée telle que $\{x'_n\}$ n'est pas bornée ; enfin montrer que E n'est pas complet.

2.20*. Soit M un sous-espace vectoiel fermé de $\mathrm{C}([0,1])$. tel que chaque élément de M est une fonction dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$. Montrer que M est de dimension finie. *Indications :* poser $T : M \to \mathrm{C}([0,1])$, par $Tx = x'$ et vérifier que son graphe est fermé ; en déduire que pour un $d \geqslant 1$ on a $\|x'\|_\infty \leqslant d$ lorsque $x \in M$ satisfait $\|x\|_\infty \leqslant 1$. On considère ensuite $s_j = j/4d$, $j = 0, 1, \ldots, 4d$ et on définit $S : M \to \mathbb{R}^{4d+1}$ par $Sx = \{x(s_0), \ldots, x(s_{4d})\}$. Montrer que si $\|x\|_\infty = 1$ alors pour certains j, $Sx(s_j) \neq 0$. En déduire que S est injective et ensuite que $\dim(M) \leqslant 4d+1$.

2.21. Montrer que les fonctionnelles suivantes sont linéaires continues et chercher leur normes :

i) $f(x) = (1/3)[x(-1) + x(1)]$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

ii) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x(t_j)$, $a_j \in \mathbb{R}, t_j \in [-1,1]$ fixés $(j = 1, \ldots, n)$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

iii) $f(x) = \int_0^1 x(s)ds$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

iv) $f(x) = \int_{-1}^1 x(s)ds - x(0)$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

v) $f(x) = \int_{-1}^1 sx(s)ds$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$ ou $x \in \mathrm{C}^1([-1,1])$ ou $x \in \mathrm{L}^2([-1,1])$;

vi) $f(x) = \sum_{j\geqslant 1} u_j/j$, $x = (u_j) \in \ell_2$ ou $x = (u_j) \in \ell_1$;

vii) $f(x) = \sum_{j\geqslant 1} u_j/2^{j-1}$, $x = (u_j) \in c_0$;

viii) $f(x) = \lim_{j\to\infty} u_j$, $x = (u_j) \in c$.

2.22*. Soit E un e.v.n. et soit $f \in E^\star$, $f \neq 0$. Montrer que $E = M \oplus N(f)$, où M est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

2.23. Soit E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Montrer que $f \in E^\star$.

2.24. Soit E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$. Montrer que $\{f_n\}$ converge dans $E^\star$ ssi la suite $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ converge uniformément pour $x \in B_E$.

2.25. Soit E e.v.n. et $x_0 \in E$. On suppose que pour toute $f \in E^\star$, telle que $\|f\| = 1$ on a $|f(x_0)| \leqslant 1$. Montrer que $\|x_0\| \leqslant 1$.

2.26. Soit E un espace de Banach. Alors, quelque soit $x_0 \notin B_E$, il existe $f_0 \in E^*$ telle que $f_0(x_0) \geqslant \sup_{x \in B_E} |f_0(x)|$.

2.27. Soit E un e.v.n. et $f \in E^\star$ avec $\|f\| = 1$. Montrer que pour chaque $x \in E$ on a $\mathrm{dist}(x, f^{-1}(\{0\})) = |f(x)|$. *Indication :* montrer que si $y \in f^{-1}(\{0\})$ alors $\|x - y\| \geqslant |f(x)|$; d'autre part si $y \in E$ avec $\|y\| = 1$ et $|f(y)| > 1 - \varepsilon$, alors en posant $z = x - (f(x)/f(y))y$, $z \in f^{-1}(\{0\})$ et $\mathrm{dist}(x, f^{-1}(\{0\})) \leqslant \|x - z\| \leqslant |f(x)|/(1-\varepsilon)$.

2.28*. Montrer que $c^\star = \ell_1$. *Indication :* On observe d'abord que tout $x = (u_j) \in c$ s'écrit $x = u_0 e_0 + \sum_{j \geqslant 1} (u_j - u_0) e_j$, où $e_0 = (1, 1, \ldots)$, $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (avec 1 sur la j-ième place) et $u_0 = \lim_{j\to\infty} u_j$. Alors, pour tout $f \in c^\star$, $f(x) = u_0 v_0' + \sum_{j \geqslant 1} (u_j - u_0) v_j$, où $v_0' = f(e_0)$ et $v_j = f(e_j)$, $j \geqslant 1$. On montre que $(v_j) \in \ell_1$. On pose $v_0 = v_0' - \sum_{j \geqslant 1} v_j$. On montre ensuite (comme pour c_0) que $\sum_{j \geqslant 1} |v_j| \leqslant \|f\|$. Reciproquement, si $\|y\| = |v_0| + \sum_{j \geqslant 1} |v_j| < \infty$, alors montrer que $(u_j) \mapsto v_0 \cdot \lim_{j\to\infty} u_j + \sum_{j \geqslant 1} v_j u_j$ définit une fonctionnelle linéaire bornée de norme $\leqslant \|y\|$.

2.29*. Soit E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n \geqslant 1} \subset E^\star$. Supposons qu'il existe $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ telle que pour tout $x \in E$, il existe K_x avec $|f_n(x)| \leqslant K_x \varepsilon_n$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$. *Indication :* utiliser le théorème de Baire.

2.30. Soit E un espace de Banach et soient $\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subset E$ et $\{f_n\}_{n \geqslant 1} \subset E^\star$. On suppose que :

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ fortement et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fortement

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ faiblement et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fortement

iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ fortement et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ faiblement-$\star$.

Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

2.31. Soit E un espace de Banach et soit $\{f_n\}_{n \geqslant 1} \subset E^\star$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fortement. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ faiblement-$\star$.

2.32. Soit E un espace de Hilbert et soient $\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subset E$ et $\{y_n\}_{n \geqslant 1} \subset E$. Quelle est la convergence de la suite $\{(x_n, y_n)\}_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{K}$ lorsque :

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ faiblement et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ fortement

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ faiblement et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ faiblement.

2.33. Soit E un espace de Hilbert et soit $\{e_n\}_{n \geqslant 1} \subset E$ une suite orthogonale. Il y a équivalence entre

i) $\sum_{n \geqslant 1} e_n$ est convergente ;

ii) $\sum_{n \geqslant 1} e_n$ est faiblement convergente ;

iii) $\sum_{n \geqslant 1} \|e_n\|^2$ est convergente.

2.34. Soit $x = (u_j) \in \ell_2$. On définit une suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \ell_2^\star$ par $f_n(x) = f_n((u_j)) = u_n$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ faiblement-$\star$ mais pas fortement.

2.35. Soit $x \in \mathrm{L}^2[-1,1]$ et définit une suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ par $f_n(x) = \int_{-1}^1 x(t)\cos(n\pi\, t)\, dt$.

i) Montrer que $f_n \in E^\star$ et calculer $\|f_n\|$.

ii) Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ faiblement-$\star$ mais pas fortement.

2.36. Chercher l'adjoint $T^\star$ de T lorsque :

i) $T : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$, $Tx(t) = \int_0^t x(s)ds$,

ii) $T : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$, $Tx(t) = \int_0^1 sx(s)ds$.

iii) $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T((u_1, u_2, \ldots)) = (u_1, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)$

iv) $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T((u_1, u_2, \ldots)) = (u_2, u_3, \ldots)$.

2.37. Soit $T_n : \ell_2 \to \ell_2$, $T((u_1, u_2, \ldots)) = (u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)$. Montrer que $T_n \in B(\ell_2, \ell_2)$, que $T_n x \to 0$, $\forall x \in \ell_2$. Trouver $T_n^\star$ et étudier si $T_n^\star x \to 0$, $\forall x \in \ell_2$?

2.38. Supposons que $P \in B(E,E)$ avec E un espace de Hilbert. On dit que P est une projection orthogonale si $N(P) \perp R(P)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes

i) P est une projection orthogonale ;

ii) P est un opérateur auto-adjoint ;

iii) P est un opérateur normal ;

iv) $(x - Px, Px) = 0$, $\forall x \in E$;

v) $\|P\| = 1$.

Indication : pour v) $\Rightarrow$ i) démontrer et utiliser l'implication

$$x, y \in E \;\text{ t.q. }\; \|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad\Longrightarrow\quad (x,y) = 0.$$

2.39*. Supposons que $T \in B(E,E)$ avec E un espace de Hilbert. Montrer que si T est autoadjoint alors $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \geqslant 1$ entier. *Indication :* montrer d'abord que $\|T\|^2 \leqslant \|TT^\star\| \leqslant \|T\|^2$, doù $\|T^2\| = \|T\|^2$. Vérifier ensuite que $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ et que $\|T^n\| \cdot \|T\|^{2^k - n} = \|T\|^{2^k}$, pour tout $k \geqslant 1$ entier et $1 \leqslant n \leqslant 2^k$.

2.40. Soit E un espace de Banach et $F : E \to E$. On suppose qu'il existe $q < 1$ tel que $\|F(x) - F(y)\| \leqslant q\|x - y\|$, $\forall x, y \in E$. Montrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $F(x) = x$. *Indication :* construire une suite de E en posant $x_{n+1} = F(x_n)$ et étudier la convergence de cette suite.