Problème B du 28 octobre 2006

Agrégation de Mathématiques - Analyse et Probabilités

(Mihai Gradinaru)

Tout au long du problème $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité sur lequel on définit une suite $\{X_n\}_1^\infty$ de variables aléatoires réelles indépendantes de carré intégrable et centrées. On pose $\sigma_n := (\mathbb{E}[X_n^2])^{\frac{1}{2}} > 0$ et $\Sigma_n := \left(\sum_{\ell=1}^n \sigma_\ell^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On utilisera S_n pour noter la somme partielle $X_1 + \ldots + X_n$ et $\widehat{S}_n := S_n/\Sigma_n = (\sum_{\ell=1}^n X_\ell)/\Sigma_n$.

Enfin, dans la suite on notera $\{Y_n\}_1^\infty$ une suite de variables aléatoires indépendantes et indépendantes des variables X_n, de même loi de densité $\gamma(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-y^2/2)$, $y \in \mathbb{R}$ et $\widehat{T}_n := (\sum_{\ell=1}^n \sigma_\ell Y_\ell)/\Sigma_n$.

Première partie

Dans cette partie seulement on supposera que les variables X_n ont la même loi, de variance $\sigma_n^2 = 1$ et, de plus, elles ont des moments finis de tout ordre.

1. Montrer que, pour tout entier $m \geqslant 3$,

$$\mathbb{E}\left[S_n^{m+1}\right] = n\mathbb{E}\left[X_n(X_n + S_{n-1})^m\right] = nm\mathbb{E}\left[S_{n-1}^{m-1}\right] + n\sum_{j=2}^m C_m^j \mathbb{E}\left[X_n^{j+1}\right]\mathbb{E}\left[S_{n-1}^{m-j}\right].$$

2. Que valent Σ_n et $\widehat{S}_n$? Déduire une égalité pour $\mathbb{E}\left[\widehat{S}_n^{m+1}\right]$. On note $L_m := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\widehat{S}_n^m\right]$. Montrer par récurrence que L_m existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $L_{m+1} = mL_{m-1}$.

3. En déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\widehat{S}_n^{2m-1}\right] = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\widehat{S}_n^{2m}\right] = \dfrac{(2m)!}{2^m m!}$.

4. Montrer que $\widehat{T}_n$ et Y_1 ont la même loi et que :

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha Y_1}\right] = \exp\left[\frac{\alpha^2}{2}\right] = \sum_{m=0}^\infty \frac{\alpha^{2m}}{2^m m!},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vérifier que les Y_n ont des moments de tout ordre et les calculer.

5. En déduire que pour toute fonction polynomiale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a :

$$(\star) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{S}_n)\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\gamma(y)dy.$$

Deuxième partie

On reprend les hypothèses générales du problème. On notera

$$g_n(\varepsilon) := \frac{1}{\Sigma_n^2}\sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}\left[X_\ell^2 \mathbb{1}_{|X_\ell| > \varepsilon\Sigma_n}\right].$$

On veut montrer que si $\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = 0$, pour chaque $\varepsilon > 0$, alors, pour des fonctions φ satisfaisant certains hypothèses de régularité, l'égalité $(\star)$ ci-dessus a lieu.

Tournez la page S.V.P.

1. Soit $\varphi \in \mathrm{C}^3(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ayant ses dérivées seconde et troisième bornées.

a) Soit la suite $\{Y_n\}_1^\infty$ comme dans l'introduction. On pose

$$\widehat{X}_\ell := \frac{X_\ell}{\Sigma_n},\ \widehat{Y}_\ell := \frac{\sigma_\ell Y_\ell}{\Sigma_n},\ 1 \leqslant \ell \leqslant n,\ \text{ et } U_m := \sum_{\ell=1}^{m-1} \widehat{X}_\ell + \sum_{\ell=m+1}^{n} \widehat{Y}_\ell,\ \text{ pour } 1 \leqslant m \leqslant n,$$

(ici la première somme est nulle si $m = 1$ et la deuxième somme est nulle si $m = n$). Montrer que

$$\left|\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{S}_n)\right] - \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\gamma(y)dy\right| = \left|\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{S}_n)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{T}_n)\right]\right|$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{n} \left|\mathbb{E}\left[\varphi(U_m + \widehat{X}_m)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(U_m + \widehat{Y}_m)\right]\right|$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left|\mathbb{E}\left[R_m(\widehat{X}_m)\right] - \mathbb{E}\left[R_m(\widehat{Y}_m)\right]\right| \leqslant \sum_{m=1}^{n} \left\{\left|\mathbb{E}\left[R_m(\widehat{X}_m)\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[R_m(\widehat{Y}_m)\right]\right|\right\},$$

où le reste R_m est donné par :

$$R_m(\xi) := \varphi(U_m + \xi) - \varphi(U_m) - \xi\varphi'(U_m) - \frac{\xi^2}{2}\varphi''(U_m),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

b) Prouver que :

$$|R_m(\xi)| \leqslant \left(\|\varphi'''\|_\infty \frac{|\xi|^3}{6}\right) \wedge \left(\|\varphi''\|_\infty |\xi|^2\right).$$

En déduire que, pour chaque $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|R_m(\widehat{X}_m)\right|\right] \leqslant \frac{\|\varphi'''\|_\infty}{6} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\widehat{X}_m|^3 \mathbb{1}_{|X_m| \leqslant \varepsilon\Sigma_n}\right]$$

$$+\|\varphi''\|_\infty \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[\widehat{X}_m^2 \mathbb{1}_{|X_m| > \varepsilon\Sigma_n}\right] \leqslant \frac{\varepsilon\|\varphi'''\|_\infty}{6} \sum_{m=1}^{n} \frac{\sigma_m^2}{\Sigma_n^2} + \|\varphi''\|_\infty g_n(\varepsilon).$$

tandis que

$$\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|R_m(\widehat{Y}_m)\right|\right] \leqslant \frac{\|\varphi'''\|_\infty}{6} \mathbb{E}\left[|Y_1|^3\right] \sum_{m=1}^{n} \frac{\sigma_m^3}{\Sigma_n^3} \leqslant \frac{\sqrt{2}\, r_n \|\varphi'''\|_\infty}{3\sqrt{\pi}},$$

avec $r_n := \max_{1 \leqslant \ell \leqslant n} \frac{\sigma_\ell}{\Sigma_n}$. En déduire l'inégalité : pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\left|\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{S}_n)\right] - \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\gamma(y)dy\right| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{r_n}{2}\right) \|\varphi'''\|_\infty + g_n(\varepsilon)\|\varphi''\|_\infty.$$

c) Prouver que, pour tout $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\sigma_m^2 \leqslant \Sigma_n^2\left(\varepsilon^2 + g_n(\varepsilon)\right) \text{ et donc que } r_n^2 \leqslant \varepsilon^2 + g_n(\varepsilon).$$

En déduire que si $\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = 0$ lorsque $n \to \infty$, pour chaque $\varepsilon > 0$, alors $(\star)$ a lieu.

Tournez la page S.V.P.

2. Soit $\varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $\sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{|\varphi(y)|}{1+y^2} < \infty$.

a) Soit une fonction $\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R};[0,\infty[)$ à support compact dans $]-1,1[$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(y)dy = 1$. Montrer que la fonction

$$\varphi_k(y) := k\int_{-k}^{k} \rho(k(y-x))\varphi(x)dx,\ y\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}^*$$

est infiniment dérivable et à support compact. Montrer que $\lim_{k\to\infty}\varphi_k = \varphi$ uniformément sur tout compact. De plus, prouver qu'il existe $K>0$ tel que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^*} |(\varphi-\varphi_k)(y)| \leqslant K(1+y^2) \text{ pour tout } y\in\mathbb{R}.$$

b) Appliquer le point **1** de cette partie pour vérifier que, lorsque $\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = 0$, pour chaque $R\in]0,\infty[$,

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{S}_n)\right] - \int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\gamma(y)dy\right|$$

$$\leqslant \limsup_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[|(\varphi-\varphi_k)(\widehat{S}_n)|\right] + \limsup_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(|\varphi-\varphi_k)(y)|\gamma(y)dy$$

$$\leqslant K\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{|\widehat{S}_n|>R}\right] + K\int_{|y|>R}(1+y^2)\gamma(y)dy.$$

Calculer la limite du dernier terme du majorant lorsque $R\uparrow\infty$.

c) On veut montrer que le premier terme du majorant tend vers zéro. On choisit $\eta\in\mathrm{C}_b^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ telle que $\eta\equiv 0$ sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\eta\equiv 1$ hors de $]-1,1[$ et on pose $\eta_R(y) := (1+y^2)\eta(y/R)$ pour $y\in\mathbb{R}$. Appliquer encore une fois le point **1** pour vérifier que

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{|\widehat{S}_n|\geqslant R}\right] \leqslant \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\eta_R(\widehat{S}_n)\right] = \int_{\mathbb{R}}\eta_R(y)\gamma(y)dy.$$

et calculer la limite lorsque $R\uparrow\infty$.
Par b) et c) déduire que si $\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon)=0$, pour chaque $\varepsilon>0$, alors $(\star)$ a lieu.

3. Soient $a<b$ deux réels. On veut montrer que

$$(\#)\qquad \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(a\leqslant\widehat{S}_n\leqslant b) = \int_a^b\gamma(y)dy.$$

a) Soient $\{\alpha_k\}_1^\infty$ et $\{\beta_k\}_1^\infty$ deux suites de fonctions dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telles que la suite croissante positive $\{\alpha_k\}_1^\infty$ satisfait $\lim_{k\to\infty}\alpha_k = \mathbb{1}_{]a,b[}$ et la suite decroissante plus petite que 1, $\{\beta_k\}_1^\infty$, satisfait $\lim_{k\to\infty}\beta_k = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Minorer $\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(a\leqslant\widehat{S}_n\leqslant b)$ à l'aide de α_k et majorer $\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(a\leqslant\widehat{S}_n\leqslant b)$ à l'aide de β_k.

b) Montrer que les hypothèses du point **2** précédent sont vérifiées et utiliser $(\star)$ pour déduire $(\#)$.

Tournez la page S.V.P.

Troisième partie

Soit $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $\|\varphi'\|_\infty < \infty$. On pose $\psi(x) := \varphi(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\gamma(y)dy$ et on définit

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} \psi(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1. Montrer que $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et que $f'(x) - xf(x) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}$.
En déduire qu'en fait $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et que $f''(x) - xf'(x) = f(x) + \varphi'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que ψ et f ne changent pas lorsqu'on remplace φ par $\varphi - \varphi(0)$.
En déduire qu'on peut supposer $\varphi(0) = 0$. Prouver que $|\varphi(t)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty |t|$ et que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\gamma(y)dy \right| \leqslant \|\varphi'\|_\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

3. Montrer que $f(x) = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty \psi(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x \in \mathbb{R}$. En déduire successivement que

$$|f(x)| \leqslant e^{\frac{x^2}{2}} \int_{|x|}^{\infty} |\psi(t \operatorname{sgn}(x))| e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et

$$|f(x)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty e^{\frac{x^2}{2}} \int_{|x|}^{\infty} \left(t + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que

$$e^{\frac{x^2}{2}} \int_{|x|}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 \ \text{ et } \ e^{\frac{x^2}{2}} \int_{|x|}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

En déduire $\|f\|_\infty \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty$.

5. Utiliser l'équation différentielle du second ordre satisfaite par f pour calculer $\frac{d}{dx}(e^{-\frac{x^2}{2}} f'(x))$.
Montrer que:

$$f'(x) = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_{x}^{\infty} (f(t) + \varphi'(t)) e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

En déduire par la même méthode que $\|f'\|_\infty \leqslant 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\|\varphi'\|_\infty$ et que $\|f''\|_\infty \leqslant 6\|\varphi'\|_\infty$.

6. On suppose de plus que $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};[0,1])$ est décroissante. Montrer que $\|\psi\|_\infty \leqslant 1$ et que $|xf(x)| \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$. Utiliser l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par f pour déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant 2$.

7. On note

$$\chi(x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\gamma(t)dt \ \text{ et } \ a := \inf\{t : \psi(t) = 0\}.$$

Étudier la monotonie de χ sur $]-\infty, a]$ et $[a, \infty[$ et calculer ses limites en $\pm\infty$. On note

$$G(x) := \int_{-\infty}^{x} \gamma(t)dt.$$

Tournez la page S.V.P.

En déduire que,

$$\|\chi\|_\infty = \chi(a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\gamma(t)dt - G(a)\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\gamma(t)dt$$

et que

$$\|\chi\|_\infty \leqslant \left(G(a)\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\gamma(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} - G(a)\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\gamma(t)dt \leqslant \frac{1}{4}.$$

8. Prouver que $|f(x)| \leqslant \sqrt{2\pi e}|\chi(x)|$, pour $x \in [-1,1]$. En déduire $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{\frac{\pi e}{8}}$.

Quatrième partie

On reprend les hypothèses générales du problème. On note

$$x \in \mathbb{R} \mapsto F_n(x) := \mathbb{P}(\widehat{S}_n \leqslant x) \in [0,1].$$

On voit (par $(\star)$ ou $(\#)$) que la suite F_n tend vers la fonction G introduite au point 7 de la troisième partie. On veut estimer la distance $\|F_n - G\|_{\mathrm{L}^1(\lambda;\mathbb{R})}$.

1*. Soit $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ayant sa première dérivée bornée. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)(G(x) - F_n(x))dx = \mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{S}_n)\right] - \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\gamma(y)dy.$$

On pourra d'abord supposer que $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est à support compact et telle que $\varphi(0) = 0$; puis faire une intégration par parties, séparement sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, \infty[$.

2. Montrer, avec les notations de la **Troisième partie**, que

$$\mathbb{E}\left[\varphi(\widehat{S}_n)\right] - \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\gamma(y)dy = \mathbb{E}\left[\psi(\widehat{S}_n)\right] = \mathbb{E}\left[f'(\widehat{S}_n)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{S}_n f(\widehat{S}_n)\right]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\hat{\sigma}_\ell^2 \mathbb{E}\left[f'(\widehat{S}_n)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{X}_\ell f(\widehat{S}_n)\right]\right),$$

où on a posé $\hat{\sigma}_\ell := \frac{\sigma_\ell}{\Sigma_n}$, $1 \leqslant \ell \leqslant n$.

3. On pose, pour $t \in [0,1]$

$$\widehat{T}_{n,\ell}(t) = \widehat{S}_n + (t-1)\widehat{X}_\ell.$$

Montrer que $\widehat{T}_{n,\ell}(0)$ est indépendante de $\widehat{X}_\ell$ et conclure que pour chaque $\ell \in \{1\ldots, n\}$,

$$\mathbb{E}\left[\widehat{X}_\ell f(\widehat{S}_n)\right] = \int_0^1 \mathbb{E}\left[\widehat{X}_\ell^2 f'(\widehat{T}_{n,\ell}(t))\right] dt$$

$$= \hat{\sigma}_\ell^2 \mathbb{E}\left[f'(\widehat{T}_{n,\ell}(0))\right] + \int_0^1 \mathbb{E}\left[\widehat{X}_\ell^2 \left(f'(\widehat{T}_{n,\ell}(t)) - f'(\widehat{T}_{n,\ell}(0))\right)\right] dt$$

4. En déduire

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)(G(x) - F_n(x))dx = \sum_{\ell=1}^{n} \hat{\sigma}_\ell^2 A_\ell - \sum_{\ell=1}^{n} \int_0^1 B_\ell(t)dt,$$

où $A_\ell := \mathbb{E}\left[f'(\widehat{S}_n) - f'(\widehat{T}_{n,\ell}(0))\right]$ et $B_\ell(t) := \mathbb{E}\left[\widehat{X}_\ell^2 \left(f'(\widehat{T}_{n,\ell}(t)) - f'(\widehat{T}_{n,\ell}(0))\right)\right]$.

Tournez la page S.V.P.

5. On va supposer que les X_n ont des moments d'ordre trois et on pose $\tau_n := \left(\mathbb{E}\left[|X_n|^3\right]\right)^{\frac{1}{3}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $r_n = \max_{1 \leqslant \ell \leqslant n} \frac{\sigma_\ell}{\Sigma_n}$ Vérifier que

$$|A_\ell| \leqslant \hat{\sigma}_\ell \|f''\|_\infty \leqslant \left(r_n \wedge \frac{\tau_\ell}{\Sigma_n}\right) \|f''\|_\infty$$

et que pour chaque $t \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$,

$$|B_\ell(t)| \leqslant 2\varepsilon t \hat{\sigma}_\ell^2 \|f''\|_\infty + 2\frac{\|f'\|_\infty}{\Sigma_n^2} \mathbb{E}\left[X_\ell^2 \mathbb{1}_{|X_\ell| \geqslant 2\varepsilon \Sigma_n}\right].$$

En déduire

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)(G(x) - F_n(x))dx \leqslant (r_n + \varepsilon)\|f''\|_\infty + 2g_n(2\varepsilon)\|f'\|_\infty.$$

6. Utiliser les estimations du point **5** de la **Troisième partie** pour obtenir

$$\|F_n - G\|_{\mathrm{L}^1(\lambda;\mathbb{R})} \leqslant 6(r_n + \varepsilon) + 3\sqrt{2\pi} g_n(2\varepsilon).$$

7. Vérifier que

$$|B_\ell(t)| \leqslant t \int_0^1 \mathbb{E}\left[|\widehat{X}_\ell|^3 \left|f''(\widehat{T}_{n,\ell}(st))\right|\right] ds \leqslant t\|f''\|_\infty \frac{\tau_\ell^3}{\Sigma_n^3}.$$

En déduire

$$\|F_n - G\|_{\mathrm{L}^1(\lambda;\mathbb{R})} \leqslant \left(6r_n + \frac{2\sum_{\ell=1}^n \tau_\ell^3}{\Sigma_n^3}\right) \wedge \left(\frac{8\sum_{\ell=1}^n \tau_\ell^3}{\Sigma_n^3}\right).$$

En particulier si les variables X_n sont de variance $\sigma_n^2 = 1$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau_n \leqslant \tau$, alors

$$\|F_n - G\|_{\mathrm{L}^1(\lambda;\mathbb{R})} \leqslant \frac{6 + 2\tau^3}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{8\tau^3}{\sqrt{n}}.$$

Cinquième partie

Dans la suite on notera $\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}$, de carré intégrable par rapport à la mesure gaussienne $\gamma(y)dy$ et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})}$ son produit scalaire.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme réel

$$H_n(x) := (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

de degré n, ayant le coefficient du terme de plus haut degré égal à 1. On notera $\bar{H}_n(x) := \dfrac{H_n(x)}{\sqrt{n!}}$ les *polynômes de Hermite* (normalisés). On veut montrer que $\left\{\bar{H}_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})$.

a) Soit A_+ et A_- les deux opérateurs définis sur $\mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ par :

$$[A_+\varphi](x) := -\frac{d\varphi}{dx}(x) + x\varphi(x) \text{ et } [A_-\varphi](x) := \frac{d\varphi}{dx}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que pour deux fonctions réelles φ et ψ continûment différentiables, ayant des dérivées à croissance au plus polynomiale à l'infini, on a :

$$\langle \varphi, A_+, \psi \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} = \langle A_-\varphi, \psi \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})}.$$

Tournez la page S.V.P.

b) Montrer que $H_{n+1} = A_+ H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que pour des entiers $0 \leqslant m \leqslant n$

$$\langle H_m, H_n \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} = \langle H_m, A_+^n H_0 \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} = \langle A_-^n H_m, H_0 \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} = m! \delta_{m,n}.$$

c) Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ on pose $H(x;z) := \exp\left[zx - \dfrac{z^2}{2}\right]$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$H(x;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x),\ x \in \mathbb{R},$$

où la convergence de la série est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Utiliser l'orthogonalité des H_n et la valeur de leur norme $\| \cdot \|_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})}$ pour déduire que, pour chaque $R > 0$,

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{|z| \leqslant R} \sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right|^2 \|H_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} = 0.$$

En déduire que la convergence de la série donnant $H(x;z)$ est, pour z dans un compact fixé de $\mathbb{C}$, uniforme dans $\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})$.

d) Soit $\varphi \in \mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})$ quelconque qui est orthogonale à tous les $\bar{H}_n$ (ou H_n). Montrer que $\langle \varphi, e^{z\bullet} \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} = 0$, pour $z \in \mathbb{C}$. On pose $\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\psi \in \mathrm{L}^1(\lambda;\mathbb{C})$. Ici et ailleurs on note $\lambda(dy) = dy$ la mesure de Lebesgue.

e) Montrer que la transformée de Fourier de ψ définie par $\hat{\psi}(\xi) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp[\mathtt{i}\xi x]\, \psi(x) dx$ est identiquement nulle. Calculer

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|\xi|} \exp[\mathtt{i}\xi x]\, \hat{\psi}(\xi) d\xi$$

et en déduire que ψ et donc φ s'annulent presque partout. Conclure que $\left\{\bar{H}_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ est une base orthonormée.

2. En utilisant la base orthonormée $\{\bar{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ on introduit d'une manière unique le *multiplicateur de Hermite* $\mathcal{H}_\theta$ pour chaque $\theta \in \mathbb{C}$, par

$$\mathcal{H}_\theta \bar{H}_n := \theta^n \bar{H}_n, \text{ pour chaque } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que le domaine de définition de l'opérateur $\mathcal{H}_\theta$ est

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{H}_\theta) = \left\{ \varphi \in \mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\theta|^{2n} \left| \langle \varphi, \bar{H}_n \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} \right|^2 < \infty \right\}$$

et que

$$\mathcal{H}_\theta \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \langle \varphi, \bar{H}_n \rangle_{\mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})} \bar{H}_n,\ \varphi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{H}_\theta).$$

b) Montrer que l'opérateur $\mathcal{H}_\theta$ est une contraction (c'est-à-dire de norme $\leqslant 1$) si et seulement si θ est un élément du disque unité fermé $\mathbf{D}$ de $\mathbb{C}$ et qu'il est unitaire (c'est-à-dire de norme 1) précisément lorsque $\theta \in \partial\mathbf{D}$.

Tournez la page S.V.P.

c) Montrer que l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{H}_\theta$ est $\mathcal{H}_{\bar{\theta}}$. En déduire que l'opérateur $\mathcal{H}_\theta$ est auto-adjoint si et seulement si $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Pour $\theta \in]0,1[$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on considere le *noyau de Mehler*

$$M(x,y;\theta) := \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left[-\frac{(\theta x)^2 - 2\theta xy + (\theta y)^2}{2(1-\theta^2)}\right].$$

a) Montrer que, pour tout $\theta \in]0,1[$ et $(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}} H(y;z) M(x,y;\theta)\gamma(y)dy = H(x;\theta z).$$

b) En déduire que pour $\theta \in]0,1[$ et $\varphi \in \mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})$

$$\mathcal{H}_\theta \varphi = \int_{\mathbb{R}} M(\cdot, y;\theta)\varphi(y)\gamma(y)dy.$$

Utiliser cette égalité pour vérifier que pour chaque $\varphi \in \mathrm{L}^2(\gamma;\mathbb{C})$, la fonction :

$$(\theta, x) \in]0,1[\times\mathbb{R} \mapsto \mathcal{H}_\theta\varphi(x) \in \mathbb{C}$$

est une fonction continue qui est de plus positive si φ l'est presque partout.

c) Calculer, pour $\theta \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}_\theta \mathbf{1}(x) = \int_{\mathbb{R}} M(x,y;\theta)\gamma(y)dy$$

et en déduire, en utilisant la symétrie de M en (x,y), la valeur de $\int_{\mathbb{R}} M(x,y;\theta)\gamma(x)dx$ pour $(\theta, y) \in]0,1[\times\mathbb{R}$.

d) Justifier pourquoi on peut appliquer l'inégalité de Jensen et l'utiliser pour prouver que, pour tout $p \in [1,\infty[$

$$|[\mathcal{H}_\theta\varphi](x)|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} M(x,y;\theta)|\varphi(y)|^p\gamma(y)dy$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} |[\mathcal{H}_\theta\varphi](x)|^p\,\gamma(x)dx \leqslant \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} M(x,y;\theta)|\varphi(y)|^p\gamma(x)\gamma(y)dxdy.$$

En déduire, que pour tout $p \in [1,\infty[$,

$$\|\mathcal{H}_\theta\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\gamma;\mathbb{C})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\gamma;\mathbb{C})}.$$

4. Pour $f \in \mathrm{L}^1(\lambda;\mathbb{C})$ on notera *l'opérateur de Fourier*

$$[\mathcal{F}f](\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{\mathtt{i}2\pi\xi x} f(x)dx,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que, pour tout $p \in]1,\infty[$ et tous complexes ζ et η on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[(\zeta + \mathtt{i}\eta)y - \frac{y^2}{2p}\right] dy = \exp\left[\frac{p}{2}(\zeta + \mathtt{i}\eta)^2\right]$$

Tournez la page S.V.P.

et en déduire l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathtt{i}2\pi\xi x} H_n(\sqrt{2\pi p}\, x) e^{-\pi x^2} dx = e^{-\pi\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \theta_p^n H_n(\sqrt{2\pi p'}\, \xi),$$

où $p' = \frac{p}{p-1}$ est le *conjugué de Hölder* de p et où $\theta_p := \mathtt{i}(p-1)^{\frac{1}{2}}$. On pourra faire le changement de variables $y = \sqrt{2\pi p}\, x$ et $\eta = \sqrt{\frac{2\pi}{p}}\, \xi$.

b) En déduire que, pour chaque $p \in]1, \infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mathtt{i}2\pi\xi x} H_n(\sqrt{2\pi p}\, x) e^{-\pi x^2} dx = \theta_p^n H_n(\sqrt{2\pi p'}\, \xi)\, e^{-\pi\xi^2}.$$

En prenant une valeur particulière de p, montrer que

$$(*) \qquad \mathcal{F} h_n = \mathtt{i}^n h_n,\ n \in \mathbb{N},$$

où h_n est la *n-ième fonction de Hermite*

$$h_n(x) := H_n(2\pi^{\frac{1}{2}} x) e^{-\pi x^2},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

c) Pour chaque $p \in]1, \infty[$ on définit $\mathcal{U}_p$ sur $\mathrm{L}^p(\gamma; \mathbb{C})$ par

$$[\mathcal{U}_p \varphi](x) := p^{\frac{1}{2p}} \varphi(\sqrt{2\pi p}\, x) e^{-\pi x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathcal{U}_p$ est une isométrie surjective de $\mathrm{L}^p(\gamma; \mathbb{C})$ sur $\mathrm{L}^p(\lambda; \mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $p \in]1, \infty[$ et tout polynôme φ

$$\mathcal{U}_{p'}^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{U}_p \varphi = A_p \mathcal{H}_{\theta_p} \varphi, \text{ où } A_p := \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{(p')^{\frac{1}{p'}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

d) On pose

$$\bar{h}_n := \frac{2^{\frac{1}{4}}}{(n!)^{\frac{1}{2}}} h_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Par le point précédent, montrer que $\bar{h}_n = \mathcal{U}_2 \bar{H}_n$. En déduire que $\{\bar{h}_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{L}^2(\lambda; \mathbb{C})$. Utiliser alors l'égalité $(*)$ du point b) ci-dessus pour déduire l'*identité de Parseval* :

$$\|\mathcal{F} f\|_{\mathrm{L}^2(\lambda;\mathbb{C})} = \|f\|_{\mathrm{L}^2(\lambda;\mathbb{C})},\ f \in \mathrm{L}^1(\lambda; \mathbb{C}) \cap \mathrm{L}^2(\lambda; \mathbb{C}).$$

Conclure que $\mathcal{F}$ détermine un opérateur unitaire $\bar{\mathcal{F}}$ sur $\mathrm{L}^2(\lambda; \mathbb{C})$, tel que

$$\bar{\mathcal{F}} f = \mathcal{F} f \text{ pour } f \in \mathrm{L}^1(\lambda; \mathbb{C}) \cap \mathrm{L}^2(\lambda; \mathbb{C}).$$

e) Utiliser le résultat précédent pour vérifier la formule d'inversion de Fourier L^2,

$$\bar{\mathcal{F}}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}},$$

où

$$[\widetilde{\mathcal{F}} f](x) := [\mathcal{F} f](-x),\ x \in \mathbb{R}, \text{ pour } f \in \mathrm{L}^1(\lambda; \mathbb{C}) \cap \mathrm{L}^2(\lambda; \mathbb{C}).$$