Master Mathématiques 1ère année
Séries Temporelles : 2006-2007

6. Estimation pour les modèles ARMA

6.1. Montrer que les estimateurs de maximum de vraisemblance $\hat{\vec{\phi}}$ et $\hat{\vec{\psi}}$ pour un modèle ARMA causal sont ceux qui minimisent la vraisemblance réduite $\ell(\vec{\phi}, \vec{\psi})$. Montrer aussi que le l'estimateur de maximum de vraisemblance de σ^2 est $\frac{1}{n}S(\hat{\vec{\phi}}, \hat{\vec{\psi}})$.

6.2. Trouver la forme de la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur de maximum de vraisemblance pour les modèles AR(1) et AR(2).

6.3. Trouver la forme de la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur de maximum de vraisemblance pour les modèles MA(1) et MA(2).

6.4. On dispose de 100 observations $x_1, \ldots, x_{100}$ d'une série temporelle et on a trouvé

$$\hat{\gamma}(0) = 1382,2;\ \hat{\gamma}(1) = 1114,4;\ \hat{\gamma}(2) = 591,72;\ \hat{\gamma}(3) = 96,215.$$

1. Utiliser ces valeurs pour trouver les estimations de Yule-Walker de ϕ_1, ϕ_2 et σ^2 pour le modèle
$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + Z_t,\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$
de la série corrigée $Y_t = X_t - 46,93$, $T = 1, \ldots, 100$.
2. Sous les mêmes hypothèses trouver des intervalles de confiance avec coefficient de sécurité 95% pour ϕ_1 et ϕ_2 (et si possible, une région de confiance pour $(\phi_1, \phi_2)^*$.
3. Utiliser l'algorithme de Durbin-Levinson pour trouver les pacf empiriques $\hat{\phi}_{11}$, $\hat{\phi}_{22}$, $\hat{\phi}_{33}$. L'hypothèse que le modèle est en effet d'ordre 2 est-elle raisonnable ?

6.5. Soit le processus AR(p) causal

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = Z_t,\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

On dispose des observations de $X_1, \ldots, X_n$ avec $n > p$.

1. Montrer que la vraisemblance gaussienne pour ce modèle est donnée par
$$L(\vec{\phi}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} (\det G_p)^{-1/2} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\vec{X}_p^* G_p^{-1} \vec{X}_p + \sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p})^2 \right] \right\}$$
où $\vec{X}_p = (X_1, \ldots, X_p)^*$ et $G_p = \frac{1}{\sigma^2}\Gamma_p = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}(\vec{X}_p \vec{X}_p^*)$.
2. Utiliser le résultat précédent pour trouver deux équations linéaires pour les estimations de moindres carrés de ϕ_1 et ϕ_2 d'un processus AR(2) causal. Comparer ces équations avec les équations de Yule-Walker.