Master Mathématiques 1ère année
Séries Temporelles : 2006-2007
5. Prévision pour les processus stationnaires

5.1. Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire de fonction moyenne m. Montrer que si $\{Y_t\} := \{X_t - m\}$, alors

$$P_{\overline{\mathrm{Vect}}\{1,X_1,\dots,X_n\}}X_{n+h} = m + P_{\overline{\mathrm{Vect}}\{Y_1,\dots,Y_n\}}Y_{n+h}.$$

5.2. Soit $\{X_t\}$ le processus MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$$

avec $|\theta| < 1$. Montrer que, avec les notations de l'algorithme des innovations, lorsque $n \to \infty$,

1. $\|X_n - \hat{X}_n - Z_n\| \to 0$;
2. $v_n \to \sigma^2$;
3. $\theta_{n1} \to \theta$. On pourra remarquer que $\theta = {\mathrm{E}(X_{n+1}Z_n)}/{\sigma^2}$ et $\theta_{n1} = {\mathrm{E}[X_{n+1}(X_n - \hat{X}_n)]}/{v_{n-1}}$.

5.3. Soient Y et $W_1, \dots, W_n$ des variables aléatoires réelles de carré intégrable. Notons $m_Y = \mathrm{E}(Y)$ et $m_i = \mathrm{E}(W_i)$. On suppose que toutes les covariances $\mathrm{Cov}(Y,Y)$, $\mathrm{Cov}(Y,W_i)$ et $\mathrm{Cov}(W_i,W_j)$ sont connues. Notons $\mathbf{W} = (W_n, \dots, W_1)^*$, $\mathbf{m}_W = (m_n, \dots, m_1)^*$, $\gamma = (\mathrm{Cov}(Y,W_n), \dots, \mathrm{Cov}(Y,W_1))^*$ et Γ la matrice de covariance de $\mathbf{W}$. Montrer que

$$P_{\overline{\mathrm{Vect}}\{1,W_n,\dots,W_1\}}Y = m_Y + \mathbf{a}^*(\mathbf{W} - \mathbf{m}_W),$$

où $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^*$ est une solution du système $\Gamma\mathbf{a} = \gamma$. Vérifier que l'erreur quadratique est $\mathrm{Var}(Y) - \mathbf{a}^*\gamma$. **Application :** Soit $\{X_t\}$ le processus AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2).$$

où $|\phi| < 1$. On observe x_1 et x_3 et on veut estimer la valeur manquante x_2. Poser $Y = X_2$ et $\mathbf{W} = (X_1, X_3)^*$ et trouver une estimation de x_2 à l'aide de la première partie. Calculer l'erreur quadratique.

5.4. Soit $\{X_t\}$ le processus MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2).$$

On possède les observations x_1, x_2, x_4, x_5. Trouver la valeur manquante x_3 en utilisant :

1. seulement x_1 et x_2 ; 2. seulement x_4 et x_5.

Calculer dans les deux cas les erreurs quadratiques.

5.5. Soit $\{X_t\}$ le processus MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2).$$

On possède les observations $x_1 = -2,58$, $x_2 = 1,62$, $x_3 = -0,96$, $x_4 = 2,62$, $x_5 = -1,36$. Calculer la prévision de la valeur de x_6 ainsi que v_5 à l'aide de :

1. l'algorithme de Durbin-Levinson ; 2. l'algorithme des innovations.

Lequel vous semble plus rapide ?

5.6. Soit $\{X_t\}$ le processus ARMA(2,1)

$$X_t - 0,1\,X_{t-1} - 0,12\,X_{t-2} = Z_t - 0,7\,Z_{t-1},\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,1).$$

On a observé les valeurs $x_1 = 0,644$, $x_2 = -0,442$, $x_3 = -0,919$, $x_4 = -1,573$, $x_5 = 0,852$, $x_6 = -0,907$, $x_7 = 0,686$, $x_8 = -0,753$, $x_9 = -0,954$, $x_{10} = 0,576$.

1. Calculer les prévisions $P_{10}X_{11}$, $P_{10}X_{12}$ et $P_{10}X_{13}$ ainsi que les erreurs quadratiques correspondantes.
2. Supposons que $Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Construire des bornes de prévisions à 95% pour X_{11}, X_{12} et X_{13}.

5.7. Soit $\{X_t\}$ le processus MA(2)

$$X_t = Z_t - 1,1\,Z_{t-1} + 0,28\,Z_{t-2},\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,1).$$

On a observé les valeurs $x_1 = -1,222$, $x_2 = 1,707$, $x_3 = 0,049$, $x_4 = 1,903$, $x_5 = -3,341$, $x_6 = 3,041$, $x_7 = -1,012$, $x_8 = -0,779$, $x_9 = 1,837$, $x_{10} = -3,693$.

1. Calculer les prévisions $P_{10}X_{11}$, $P_{10}X_{12}$ et $P_{10}X_{13}$ ainsi que les erreurs quadratiques correspondantes.
2. Supposons que $Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Construire des bornes de prévisions à 95% pour X_{11}, X_{12} et X_{13}.

5.8. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les observations de $X_1, \ldots, X_n$ d'un processus AR(p)

$$\phi(B)X_t = Z_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2).$$

Montrer que l'erreur quadratique de la prévision P_nX_{n+h} est

$$\sigma_n^2(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2,$$

où $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = 1/\phi(z)$.

5.9. Soit $\{X_t\}$ le processus MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$$

avec $|\theta| < 1$.

1. Montrer que, $v_n = \mathrm{E}|X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}|^2 = \sigma^2 {}^{(1-\theta^{2n+4})}/_{(1-\theta^{2n+2})}$
2. Si on note $\tilde{X}_{n+1}^T := -\sum_{j=1}^{n}(-\theta)^j X_{n+1-j}$ la troncature de P_nX_{n+1}. Montrer que $\mathrm{E}|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}^T|^2 = \sigma^2(1 + \theta^{2n+2})$.
   Comparer cette valeur avec v_n, lorsque $|\theta|$ est proche de 1.