Master Mathématiques 1ère année

Séries Temporelles : 2006-2007

4. Comportement asymptotique des estimateurs des fonctions moyenne et autocovariance

4.1. Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire avec moyenne nulle et fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ telle que $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ et $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) = 0$. Montrer que $n\mathrm{Var}(\overline{X}) \to 0$ et que $n^{1/2}\overline{X} \to 0$ en probabilité, quand $n \to \infty$.

4.2. Soit $\{X_t\}$ un processus AR(1) causal avec moyenne μ. Montrer que $\overline{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2(1-\phi)^{-2}n^{-1})$. On possède 100 observations d'un processus AR(1) avec $\phi = 0,6$ et $\sigma = 2$ et on trouve $\overline{x} = 0,271$. Donner un intervalle de confiance pour μ à coefficient de sécurité 95%. Peut-on penser que $\mu = 0$?

4.3. Soit $\{X_t\}$ un processus MA(1). Donner les éléments de la matrice de covariance asymptotique pour $(\hat{\rho}(1), \ldots, \hat{\rho}(h))$ à l'aide de la formule de Bartlett. Pour quelles valeurs j et k dans $\{1, 2, \ldots\}$ on a $\hat{\rho}(j)$ et $\hat{\rho}(k)$ sont asymptotiquement indépendantes ?

4.4. Soit $\{X_t\}$ un processus AR(1). Utiliser la formule de Bartlett pour calculer la covariance asymptotique de $\hat{\rho}(1)$ et $\hat{\rho}(2)$. Quel est le comportement de la corrélation asymptotique de $\hat{\rho}(1)$ et de $\hat{\rho}(2)$ quand $\phi \to \pm 1$?

4.5. Soit $\{X_t\}$ un processus AR(1). On sait que l'autocorrélation $\hat{\rho}(1) \approx \mathcal{N}(\phi, (1-\phi^2)n^{-1})$. Montrer que ${}^{n^{1/2}(\hat{\rho}(1)-\phi)}/_{(1-\hat{\rho}(1)^2)^{1/2}} \approx \mathcal{N}(0,1)$. On possède 100 observations d'un processus AR(1) et on trouve $\hat{\rho}(1) = 0,638$. Construire un intervalle de confiance pour ϕ de coefficient de sécurité 95%. Ces données sont-ils en cohérence avec $\phi = 0,7$?

4.6. Dans l'exercice précédent on suppose qu'on estime ϕ est estimé par $(\hat{\rho}(3))^{1/3}$. Montrer que $(\hat{\rho}(3))^{1/3} \approx \mathcal{N}(\phi, n^{-1}v)$ et exprimer v en termes de ϕ. Comparer les variances asymptotiques de $\hat{\rho}(1)$ et $(\hat{\rho}(3))^{1/3}$ quand ϕ varie entre -1 et 1.

4.7. Soit $\{X_t\}$ un processus AR(1)

$$X_t - m = \phi(X_{t-1} - m) + Z_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2).$$

avec $|\phi| < 1$. Trouver les constantes $a_n > 0$ et b_n telles que $\exp(\overline{X}) \approx \mathcal{N}(b_n, a_n)$.

4.8. Trouver la loi asymptotique de ${}^{\hat{\rho}(2)}/_{\hat{\rho}(1)}$ pour le processus gaussien MA(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{IID}(0, v).$$

où $0 < |\theta| < 1$.