Master Mathématiques 1ère année

Séries Temporelles : 2006-2007

3. Processus ARMA

3.1. Soit $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ l'unique solution stationnaire des équations autoregressives

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

où $|\phi| > 1$. On sait que $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} Z_{t+j}$. Définissons la suite $W_t := X_t - {}^1\!/\!_\phi\, X_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\{W_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_w^2)$.
2. Exprimer σ_w^2 en fonction de σ^2 et ϕ.
3. Montrer que $\{X_t\}$ est un processus AR(1) causal.

3.2. Soit le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant les équations autoregressives

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

avec $|\phi| = 1$. On veut montrer qu'il n'y a pas de solution stationnaire pour ces équations. Supposer qu'il existe une solution stationnaire et utiliser les équations pour calculer la variance de $X_t - \phi^{k+1} X_{t-k-1}$. Conclure.

3.3. Soit $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ un processus ARMA stationnaire défini par

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2),$$

où $\phi(\cdot)$ et $\theta(\cdot)$ n'ont pas de zéros communs et tels que $\phi(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$. Soit $\xi(\cdot)$ un polynôme quelconque tel que $\xi(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$. Montrer que les équations

$$\xi(B)\phi(B) Y_t = \xi(B)\theta(B) Z_t,\ t \in \mathbb{Z},$$

ont l'unique solution stationnaire $\{Y_t\} = \{X_t\}$.

3.4. Soient $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ deux s.t. stationnaires centrées ayant la même fonction d'autocovariance et supposons que $\{Y_t\}$ est un processus ARMA(p, q). On veut montrer que $\{X_t\}$ est aussi un processus ARMA(p, q). On va noter $\phi_1, \ldots, \phi_p$ les coefficients AR de $\{Y_t\}$ et on pose

$$W_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p},\ t \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que pour le processus $\{W_t\}$ on a $\gamma_w(h) = 0$, pour $|h| > q$. En déduire par un résultat de cours que $\{W_t\}$ est un processus MA(q). Conclure.

3.5. Soit $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ l'unique solution stationnaire des équations

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t,\ t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2),$$

où $\phi(\cdot)$ et $\theta(\cdot)$ n'ont pas de zéros communs et tels que $\phi(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$. Soit U une variable aléatoire de carré intégrable centrée non-corrélée avec $\{X_t\}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = 1$.

1. Montrer que $\{\tilde{X}_t := X_t + U\, z_0^t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus stationnaire à valeurs complexes (c'est à dire avec $\mathrm{E}(\tilde{X}_t)$ et $\mathrm{E}(\tilde{X}_{t+h}\overline{\tilde{X}_t})$ indépendantes de t).
2. Montrer que $\{\tilde{X}_t\}$ et $\{X_t\}$ satisfont les équations

$$(I - z_0 B)\phi(B) X_t = (I - z_0 B)\theta(B) Z_t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

3.6. Parmi les processus ARMA suivants trouver lesquels sont causaux et/ou inversibles. On sait que $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

1. $X_t - 0,5X_{t-1} = Z_t + 0,5Z_{t-1}$;
2. $X_t + 1,9X_{t-1} + 0,88X_{t-2} = Z_t + 0,2Z_{t-1} + 0,7Z_{t-2}$;
3. $X_t + 1,6X_{t-1} = Z_t - 0,4Z_{t-1} + 0,04Z_{t-2}$.

Pour ceux qui sont causaux calculer les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation. Donner leurs représentations graphiques (diagramme en bâtons). Pour ceux qui sont causaux et/ou inversibles calculer les coefficients ψ_j et/ou π_j, pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$, des représentations $X_t = \psi(B)Z_t$ et $Z_t = \pi(B)X_t$.

3.7. Soit $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

1. Trouver les coefficients ψ_j de la représentation $X_t = \psi(B)Z_t$ pour le processus ARMA(2, 1) : $(I - 0,5B + 0,04B^2)X_t = (1 + 0,25B)Z_t$. Donner les valeurs pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ du processus AR(3) $(I-0,5B)(I-0,4B)(I-0,1B)X_t = Z_t$, lorsque $\sigma^2 = 1$. Donner les valeurs pour $h = 0, 1, 2, 3, 4$.
3. Calculer les fonctions moyenne et d'autocovariance du processus ARMA(2,1) $X_t = 2 + 1,3X_{t-1} - 0,4X_{t-2} + Z_t + Z_{t-1}$. Est-il causal et inversible ?

3.8. Soit $\{X_t\}$ un processus ARMA(1,1)

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},\ \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2),$$

où $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$. Trouver les coefficients ψ_j de la représentation $X_t = \psi(B)Z_t$ et montrer que la fonction d'autocorrélation de $\{X_t\}$ est donnée par

$$\rho(1) = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + \theta^2 + 2\phi\theta} \quad \text{et} \quad \rho(h) = \phi^{h-1}\rho(1),\ h \geqslant 1.$$

3.9. Soit $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$, avec $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ et $|\theta| < 1$. Utiliser les équations de prévision pour montrer que la meilleure prévision quadratique $\hat{X}_{n+1}$ dans $\overline{\mathrm{Vect}}\{X_1, \ldots, X_n\}$ est

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \phi_j X_{n+1-j},$$

où $\phi_1, \ldots, \phi_n$ satisfont la récurrence

$$-\theta\phi_{j-1} + (1 + \theta^2)\phi_j - \theta\phi_{j+1} = 0,\ 2 \leqslant j \leqslant n - 1,$$

avec les conditions initiales $(1 + \theta^2)\phi_n = \theta\phi_{n-1}$ et $(1 + \theta^2)\phi_1 = \theta\phi_2 - \theta$. En déduire l'expression de la fonction d'autocorrélation partielle (utiliser la deuxième définition de cette fonction).