Master Mathématiques 1ère année
Séries Temporelles : 2006-2007
1. Séries temporelles stationnaires

1.1. Soit $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de v.a. i.i.d. centrées de variance σ_Z^2. On pose $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$.

1. Montrer que pour $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ on a
$$\gamma_X(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_Z^2 & \text{si } h = 0 \\ \theta\sigma_Z^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases} .$$
En déduire que la s.t. $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire.
2. Supposons ensuite que la transformée de Laplace de la loi commune de Z existe sur $\mathbb{R}$ $\ell_Z(\lambda) = \mathrm{E}[\exp(\lambda Z_1)]$. Exprimer la fonction $\mathrm{E}[\exp(\sum_{j=1}^d \lambda_j X_j)]$ en termes de $\ell_Z(\cdot)$. En déduire que la s.t. $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est strictement stationnaire.

1.2. Soit $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de v.a. i.i.d. centrées de variance σ^2, de loi gaussienne et soient a, b, c constantes. Lequels des processus suivants sont stationnaires ? Pour chaque processus stationnaire calculer les fonctions de moyenne et d'autocovariance.

1. $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-1}$;
2. $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$;
3. $X_t = Z_0 \cos(ct)$.

1.3. Soit le filtre de moyennes mobiles symétrique avec les poids $a_j = (2q+1)^{-1}$, $-q \leqslant j \leqslant q$.

1. Si $m_t = a + bt$, montrer que $\sum_{j=-q}^q a_j m_{t+j} = m_t$, $t \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de v.a. i.i.d. centrées de variance σ^2 et on note $A_t = \sum_{j=-q}^q a_j Z_{t+j}$. Calculer $\mathrm{E}(A_t)$ et $\mathrm{Var}(A_t)$.
3. On pose $X_t = m_t + Z_t$ et on note $W_t = \sum_{j=-q}^q a_j X_{t+j}$. Calculer les fonctions de moyenne et d'autocovariance de $\{W_t\}$. Est-il stationnaire ?

1.4.

1. Montrer qu'un filtre linéaire $\{a_j\}$ laisse passer un polynôme de degré k sans le transformer, c'est-à-dire, que $m_t = \sum_j a_j m_{t+j}$, $t \in \mathbb{Z}$, pour tout polynôme de degré k, $m_t = c_0 + c_1 t + \ldots + c_k t^k$ ssi
$$\sum_j a_j = 1 \text{ et } \sum_j j^r a_j = 0, \text{ pour } r = 1, \ldots, k.$$
2. Montrer que le filtre 15-points du cours laisse passer sans distorsion une tendance cubique.

1.5. Soit $m_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$, $t \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $m_t = \sum_{j=-2}^2 a_j m_{t+j} = \sum_{i=-3}^3 b_i m_{t+i}$, $t \in \mathbb{Z}$, où $[a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2] = \frac{1}{35}[-3, 12, 17, 12, -3]$ et $[b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3] = \frac{1}{21}[-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2]$.

2. Soit $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de v.a. i.i.d. gaussiennes, centrées de variance σ^2 et on note $X_t = m_t + Z_t$. Soit $U_t = \sum_{j=-2}^{2} a_j X_{t+j}$ et $V_t = \sum_{i=-3}^{3} b_i X_{t+i}$. Calculer les fonctions moyenne de $\{U_t\}$ et de $\{V_t\}$. Calculer $\mathrm{Corr}(U_t, U_{t+1})$ et $\mathrm{Corr}(V_t, V_{t+1})$.
3. Appliquer ces deux filtres à l'exemple de la population et commparer les graphes de $\{u_t\}$ et $\{v_t\}$ (20 valeurs).

1.6. Soit $m_t = c_0 + c_1 t + \ldots + c_k t^k$, $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que ∇m_t est un polynôme de degré $k-1$ en t. En déduire que $\nabla^{k+1} m_t = 0$.

1.7. Montrer que le filtre ayant les coefficients $[a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2] = \frac{1}{9}[-1, 4, 3, 4, -1]$ laisse passer sans distorsion les polynômes de degré 3 et élimine les composantes de saisonnalité de période 3.

1.8. Soit $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ une s.t. stationniare avec la fonction moyenne nulle et soient a et b deux constantes. Si $X_t = a + bt + s_t + Y_t$, où s_t est une composante de saisonnalité de période 12, alors montrer que $\nabla\nabla_{12} X_t = (\mathrm{I} - \mathrm{B})(\mathrm{I} - \mathrm{B}^{12}) X_t$ est stationnaire.

1.9. Soient $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ deux s.t. stationnaires telles que pour tout s et tout t, $\mathrm{Corr}(X_s, Y_t) = 0$. Montrer que le processus $\{X_t + Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

1.10. Soit $\{X_t : t \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a. i.i.d. centrées de variance σ^2 et soit $m \in \mathbb{R}$ une constante. On définit $S_0 = 0$ et $S_t = m + S_{t-1} + X_t$, $t \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les fonctions moyenne et autocovariance de $\{S_t\}$.
2. Montrer que $\{\nabla S_t\}$ est stationnaire et lui calculer les fonctions moyenne et autocovariance.

1.11. Étudier si les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{Z}$ sont des fonctions d'autocovariance d'une s.t. stationnaire.

1. $k(h) = (-1)^{|h|}$
2. $k(h) = 1 + \cos(\pi h/2) + \cos(\pi h/4)$
3. $k(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 0,4 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$