Université de Rennes 1 | Oraux blancs
L2 Defi Math | 27 novembre 2018

Analyse/Algèbre

- oral 20 minutes -

Exercices pour le premier passage

Exercice 1. f étant continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Exercice 2. Montrer que la fonction

$$f\ :\ x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 3. Montrer que la suite réelle (x_n) définie par $x_0 \in [a,b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(f(x_n) + x_n\Big)$$

où f est 1-lipschitzienne de $[a,b]$ dans $[a,b]$, converge vers un point fixe de f.

Exercice 4. Soient $a \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1.$$

Exercice 5. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n.

Exercice 6. Soient des entiers $a > 1$ et $n > 0$. Montrer que si $a^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.

Exercice 7. Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 8. Déterminer les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

Exercice 9. Étudier la convergence de la suite $\Big(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\Big)$, où $a > 0$.

Exercice 10. Étudier les limites de $\Big(\prod_{k=1}^n \big(1 + \frac{k}{n}\big)\Big)^{1/n}$ et de $\Big(\prod_{k=1}^n \big(1 + \frac{k}{n^2}\big)\Big)^{1/n}$.

Exercice 11. La fonction $t \mapsto \sin\frac{1}{t}$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Exercice 12. Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geqslant 1$. On la note x_n. Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n) puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 13. On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

1. Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.
2. Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

Exercice 14. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker(g \circ f)} = \mathrm{Kerf}$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.
2. Montrer
$$E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g.$$
3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.

Exercice 15. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Montrer

$$\left|\mathrm{rang}(f) - \mathrm{rang}(g)\right| \leqslant \mathrm{rang}(f+g) \leqslant \mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g).$$

Exercice 16. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ. Calculer

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Exercice 17. Soit a un réel strictement positif différent de 1. On définit la suite (u_n) de la façon suivante : u_0 est strictement compris entre a et 1, autrement dit $(u_0 - 1)(u_0 - a) < 0$. Ensuite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + a - \frac{a}{u_n}.$$

Montrer que pour tout entier n, le réel u_n est compris entre a et 1. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 18. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe un élément $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$. On pourra étudier la fonction $x \mapsto e^x\big(f(x) - f'(x)\big)$.

Exercice 19. Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $p-1$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2. En déduire que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p (\mathrm{mod}\, p)$.
3. Montrer que pour tout entier n, $n^p \equiv n (\mathrm{mod}\, p)$.
4. Qu'obtient-on si p ne divise pas n ?

Exercice 20. Effectuer la division de $A_n = X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X\cos(\theta) + 1$ par $B = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$. On pourra commencer par factoriser $A_{k+1} - A_k$.

Exercice 21. Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I$. En déduire toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = B$. On pourra poser $A = 2B - I$.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$. Montrer que $A = e^x J + e^{-x} K$ où

$$J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour n un entier trouver la matrice A^n.

Exercice 23. Pour $n \geqslant 1$ entier on pose $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer l'expression de la dérivée n-ième de f_n, $f_n^{(n)}(x)$. On pourra montrer que pour tout $n \geqslant 1$ il existe un réel a_n tel que $f_n^{(n)}(x) = \frac{a_n}{x}$.

Exercice 24. Résoudre l'équation différentielle $x^3 y' - x^2 y = 1$.

Exercice 25. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, il existe un unique $w \in \mathbb{C}$ tel que $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$, $|w| > 1$.

Exercice 26. On note E l'ensemble $\left\{u_{p,q} := \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{pq} \ : \ p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\inf E$, $\sup E$.

Exercice 27. Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple $(u_0, v_0) \in]0,\infty[\times]0,\infty[$ et par les relations de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$, $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n}$.

Exercice 28. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$. Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 29. Soit G un ensemble muni d'une opération associative (notée multiplicativement) telle que :

— il existe un élément e de G tel que pour tout $x \in G$, $xe = x$;

— pour tout $x \in G$ il existe un élément x' tel que $xx' = e$.

Montrer que G est un groupe.

Exercice 30. Trouver un polynôme P de degré 5 tel que le reste de sa division par $(X+1)^3$ est -5 et le reste de sa division par $(X-1)^3$ est 11.

Exercice 31. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée et on suppose qu'il existent deux matrices U, V et un réel λ tels que $A^n = \lambda^n(U + nV)$ pour $n = 1, 2, 3$. Montrer que l'égalité $A^n = \lambda^n(U + nV)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 32. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 33. On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\left\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geqslant 0\right\}$ par :

$$z \leqq z' \Leftrightarrow |z| < |z'| \text{ ou } \Big(|z| = |z'| \text{ et } \Re(z) \leqslant \Re(z')\Big).$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice 34. Soit $c > 0$ et $I =]-c, c[$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in I^2, x * y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}} \in I.$$

Montrer que la loi $*$ munit I d'une structure de groupe abélien.

Exercice 35. Soit $(G, \times)$ un groupe, H un sous groupe de $(G, \times)$ et $a \in G$. Montrer que $aHa^{-1} = \left\{axa^{-1} : x \in H\right\}$ est un sous groupe de $(G, \times)$. À quelle condition simple $aH = \{ax : x \in H\}$ est un sous groupe de $(G, \times)$?

Exercice 36. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente (c'est-à-dire il existe un entier $p > 1$ tel que $B^p = O$) et commute avec A. Montrer que A et $A+B$ sont simultanément inversibles.

Exercice 37. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

Exercice 38. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$$

est lipschitzienne.

Exercice 39. Calculer pour $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1 - x^n)(1 - x^{n+1})}.$$

Exercice 40. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 41. Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de ces mains comportent exactement un As ?
3. Combien de ces mains ne comportent aucun As ?
4. Combien comportent au moins un As ?

Exercice 42. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 43. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,*)$ tels que $H \cup K$ en soit aussi un sous-groupe. Montrer que $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 44. Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$.

Exercice 45. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que

$$f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x}, \quad \text{quand } x \to +\infty.$$

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 46. Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Peut-on préciser la nature de la série de terme général $u_n = a_0 a_1 \dots a_n$?

Exercice 47. Soient

$$u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{3/4}}.$$

1. Montrer que pour n assez grand,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
2. En déduire que $\sum u_n$ diverge (on pourra utiliser $\frac{u_n}{v_n}$).

Exercice 48. Soient a un réel non nul. Déterminer les triplets (x,y,z) de réels non nuls vérifiant :

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Exercice 49. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$

2. Déterminer la limite de
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}.$$
3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Rappel (le lemme de Cèsaro) : soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On désire établir que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général
$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$
converge aussi vers ℓ.

Exercice 50. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n s'annulant en $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Montrer que pour chaque $x_0 \in [a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ vérifiant
$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1)(x_0 - a_2)\ldots(x_0 - a_n)}{n!} f^{(n)}(c).$$
On pourra, lorsque cela est possible, introduire un réel K tel que
$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1)\ldots(x_0 - a_n)}{n!} K$$
et établir que la dérivée n-ième de $x \mapsto f(x) - \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{n!}K$ s'annule.

Exercice 51. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < c < \frac{b-a}{2}$ et
$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Représenter
$$g(t) = \int_a^b f(t-x)dx.$$

Exercice 52. Établir
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx.$$
En déduire la valeur de I.

Exercice 53. Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$.

Exercice 54. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = \max(x, 0)$.

Exercice 55. Établir :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\arctan(\sinh x)\right| = \arccos\Big(\frac{1}{\cosh x}\Big).$$

Exercice 56. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 0! + 1! + 2! + \cdots + n!$. Montrer que $u_n \sim n!$.

Exercice 57. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}.$$

1. Donner une condition suffisante pour la convergence de (y_n). Est-elle aussi nécessaire ?
2. Ici $x_n = a$ pour tout n, où $a > 0$. Etudier la convergence de (y_n).
3. Même question dans le cas où $x_n = ab^{2^n}$ pour tout n, avec $b > 0$.
4. Montrer que (y_n) converge si, et seulement si, la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Exercice 58. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.

Exercice 59. Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}.$$

Exercice 60. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a, b deux entiers relatifs avec $b > 0$ et $\sqrt{b}$ irrationnel.

1. Exemple : montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
2. Quelle est la forme de $(a + \sqrt{b})^n$?
3. Montrer que si $a + \sqrt{b}$ est racine de P alors $a - \sqrt{b}$ aussi.
4. On suppose que $a + \sqrt{b}$ est racine double de P. Montrer que $P = RQ^2$ avec R et Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 61. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \Big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\Big),$$

en écrivant un d.l. du terme général jusqu'à $O(1/n^2)$. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 62.Étudier la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Exercice 63. Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$. Soient m le minimum de f et M son maximum. Prouver que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant -mM$.

Exercice 64. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = O_n$.

1. Montrer que $\mathrm{I}_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse. On pourra calculer $(A^{-1}BA)^p$.
2. On pose
$$H = \left\{\mathrm{I}_n + P(B) : P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\right\}.$$
Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

Exercice 65. Pour $a > 0$, étudier la convergence de la série
$$\sum_{n\geqslant 1} a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

Exercice 66. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1.$$
Trouver un équivalent simple en 0 de f.

Exercice 67. On considère $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$.

1. Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Calculer
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt.$$

Exercice 68. Soit $(G, *)$, $(G', \top)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de $(G', \top)$.
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 69. Soit
$$A = \left\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1. Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Quels en sont les éléments inversibles ?

Exercice 70. Soit $f \in \mathrm{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite
$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt}\right)_{n\geqslant 0}.$$

Exercice 71. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 72. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I + A$ soit inversible. On pose $B = (I - A)(I + A)^{-1}$.

1. Montrer que $B = (I + A)^{-1}(I - A)$.
2. Montrer que $I + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Exercices pour le deuxième passage

Exercice 101.

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Étudier l'existence et le cas échéant faire le calcul de

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right).$$

Indication : écrire le produit dans sa forme developpée.

Exercice 102.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ vérifiant $\displaystyle\int_0^x t f(t)dt = 0$.

Indication : introduire F et G des primitives des deux fonctions sous les intégrales et distinguer le cas où F est de signe constant ou pas.

Exercice 103. Soit $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B) \text{ et } \Phi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \Phi(I_2).$$

1. Démontrer que $\Phi(O_2) = 0$.
2. Si A est nilpotente (c'est-à-dire si $A^2 = O_2$), démontrer que $\Phi(A) = 0$.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et B la matrice obtenue à partir de A en permutant les lignes de A. Démontrer que $\Phi(B) = -\Phi(A)$.

   Indication : calculer $\Phi(I_2)$ et $\Phi(E)$ avec $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 104.

Déterminer tous les polynômes de $K[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.

Indication : écrire la division de P par P' en partant des coefficients dominants.

Exercice 105.

Trouver les nombres premiers dont l'écriture en base b utilise une fois et une seule tous les chiffres possibles de la base de numération (le 0 est possible en tête).

Indication : utiliser l'écriture en base $b \geqslant 4$ et distinguer suivant la parité de b.

Exercice 106. Étudier la continuité de la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Indication : commencer par étudier la suite $u_n = \frac{x^n}{n!}$ avec $x > 0$.

Exercice 107. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues.
On pose
$$\varphi(t) = \sup_{x\in[0.1]} \Big(f(x) + tg(x)\Big).$$
Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est lipschitzienne. Est-ce la propriété reste vraie si on remplace sup par inf ?

Indication : écrire une autre expression de φ.

Exercice 108.

On note $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les solutions de $z^n = a$ (avec $|a| = 1$, $n \in \mathbb{N}$). Montrer que les points images de $(1+z_1)^n, (1+z_2)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Indication : écrire la forme exponentielle des complexes $1 + z_k$.

Exercice 109. Soient a, b deux réells et soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que
$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Indication : utiliser la forme exponentielle des complexes.

Exercice 110. Résoudre l'équation
$$2^x + 4^{x^2} = 3^x + 3^{x^2}$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Indication : mettre cette équation sous la forme $\int_0^1 \varphi(t,x)dt = 0$ et faire une étude du signe de $\varphi(t,x)$.

Exercice 111. Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?.

Indication : utiliser la forme exponentielle des complexes.

Exercice 112. On pose $f : x \mapsto \Big((x^2-1)^n\Big)^{(n)}$. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ et ensuite montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 113. Soit (u_n) une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle. On suppose que la suite de terme général
$$\sum_{k=1}^{n} u_k - nu_n$$
est bornée. Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 114. Soit (u_n) une suite de réels de $[0,1]$ de limite 1. Déterminer les fonctions $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}.$$

Indication : remarquer que f est continue sur le segment fermé $[0,1]$.

Exercice 115. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $N = 4k+3$.

Indication : considérer $N_n = 4p_1p_2\dots p_n + 3$, avec $p_1 = 7$, $p_2 = 11$, etc.

Exercice 116. Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt.$$

Indication : montrer que $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt.$

Exercice 117. Montrer que

$$H := \left\{ x + y\sqrt{3} : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

Exercice 118.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$.

Indication : la rélation de division euclidienne est vraie en particulier en $\mathbb{C}[X]$ et donc on peut l'appliquer à un complexe bien choisi.

Exercice 119. Étudier la convergence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(e^{u_n} + e^{v_n}\right) = 2.$$

Indication : considérer la somme $S_n = e^{u_n} + e^{v_n}$ et le produit $P_= e^{u_n} e^{v_n}$ des racines d'un pôlynome.

Exercice 120. Soit $*$ une loi de composition interne associative sur un ensemble E fini non vide. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Rappel : x est régulier si $\forall a, b \in E$, $x * a = x * b$ implique $a = b$ et $a * x = b * x$ implique $a = b$. Montrer que E est un groupe.

Indication : on pourra considérer la suite $x^n = x * x * \dots * x$ (n facteurs, avec $n \geqslant 1$) ainsi qu'une application $x \mapsto a * x$, avec $a \in E$.

Exercice 121. Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

où f est continue, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Étudier le prolongement par continuité de g en 0.
2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.
3. Pour $0 < a < b$, montrer que

$$\int_a^b g^2(t)dt = 2\int_a^b f(t)g(t)dt + ag^2(a) - bg^2(b)$$

puis montrer que

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)dt}.$$

4. Étudier la nature de

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)dt.$$

Indication : pour les premiers points on pourra considérer F une primitive de f.