Démonstration Propo sur $\mathcal{M}_m$

- $\emptyset \in \mathcal{M}_m$ car $m(A) \geq \underset{\overset{\parallel}{0}}{m(A\cap\emptyset)} + m(A\cap E) = m(A)$

- si $B \in \mathcal{M}_m$ alors $m(A) \geq m(A\cap B^c) + m(A\cap (B^c)^c)$ donc $B^c \in \mathcal{M}_m$

- $\mathcal{M}_m$ est stable par union finie : $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_m$, $A \subset E$

$$A\cap(B_1\cup B_2) \overset{not}{=} C \quad \text{et alors } \begin{array}{l} C\cap B_1 = A\cap B_1 \\ C\cap B_1^c = A\cap B_1^c \cap B_2 \end{array}$$

$$m(A\cap(B_1\cup B_2)) = m(C) = m(C\cap B_1) + m(C\cap B_1^c) \text{ car } B_1 \in \mathcal{M}_m$$
$$= m(A\cap B_1) + m(A\cap B_1^c \cap B_2)$$

et

$$m(A\cap B_1^c) = m((A\cap B_1^c)\cap B_2) + m((A\cap B_1^c)\cap B_2^c) \text{ car } B_2 \in \mathcal{M}_m$$

et alors

$$m(A\cap(B_1\cup B_2)) + m(A\cap(B_1\cup B_2)^c) = m(A\cap B_1) + m(A\cap B_1^c \cap B_2) + m(A\cap B_1^c)$$
$$- m(A\cap B_1^c\cap B_2) = m(A) \text{ car } B_1 \in \mathcal{M}_m$$

Ainsi $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_m$

- $\mathcal{M}$ stable par réunion disjointe de $\mathcal{M}_m$ (dénombrable) : (B_n) suite de $\mathcal{M}_m$ disjoints

et on m.q $\bigcup B_n \in \mathcal{M}_m$ $\quad \bigcup_{n=0}^{N} B_n \in \mathcal{M}_m$

Soit $A \subset E$ et le point précédent m.q

On montre par récurrence que $m(A) = \sum_{n=0}^{N} m(A\cap B_n) + m\left(A\cap \bigcap_{n=0}^{N} B_n^c\right)$ $(*)$

$N=0$: $B_0 \in \mathcal{M}_m$

"$N \Rightarrow N+1$" $\quad m\left(A\cap \bigcap_{n=0}^{N} B_n^c\right) \overset{B_{N+1}\in\mathcal{M}_m}{=} m\left(A\cap \bigcap_{n=0}^{N} B_n^c \cap B_{N+1}\right) + m\left(A\cap \bigcap_{n=0}^{N+1} B_n^c\right)$

$\underset{\text{car disj}}{B_{N+1} \subset \bigcap_{n=0}^{N} B_n^c} \longrightarrow \; = m(A\cap B_{N+1}) + m\left(A\cap \bigcap_{n=0}^{N+1} B_n^c\right) \Rightarrow$ concl

Comme m croissante donc on déduit de (*)

$$m(A) \geqslant \sum_{n=0}^{N} m(A\cap B_n) + m\left(A \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n^c\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} m(A\cap B_n) + m\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right)^c\right)$$

et laissant $N \to \infty$

$$m(A) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} m(A\cap B_n) + m\left(A \cap \left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right)^c\right) \quad (**)$$

Par σ-sous-additivité

$$m\left(A\cap\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right)\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} m(A\cap B_n)$$

donc $m(A) \geqslant m\left(A\cap\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right)\right) + m\left(A\cap\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right)^c\right)$ donc $\bigcup_{n\geqslant 0} B_n \in \mathcal{M}_m$

- $\mathcal{M}_m$ est aussi stable par union finie, passage complém, donc interso finie, donc différence. $\mathcal{M}_m$ stable par union disjointe donc comme, pour une suite qqe (A_n) on a

$$\bigcup_{n\geqslant 0} A_n = \bigcup_{n\geqslant 0} \underbrace{\left[A_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right)\right]}_{disj} \Rightarrow \mathcal{M}_m \text{ stable par union dénombrable}$$

- clair $m(\emptyset) = 0$
- soit (B_n) suite élém disj 2-à-2 de $\mathcal{M}_m$ et soit $D := \dot{\bigcup}_{n\geqslant 0} B_n$

D'après (**) avec D à la place de A, on a

$$m\left(\dot{\bigcup_{n\geqslant 0}} B_n\right) = m(D) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} m(B_n)$$

L'inégalité inverse est assurée par la σ-sous-additivité $\Rightarrow$ égalité

donc m mesure sur $\mathcal{M}_m$. $\boxtimes$