La démo de la Def - thm suit les pas suivants

pas 1) ℓ est une mesure ext. sur $\mathbb{R}$ (donc $\mathcal{M}_\ell$ est une tribu)

pas 2 $\mathcal{M}_\ell$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (donc ℓ étant mesure sur $\mathcal{M}_\ell$ elle l'est sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

pas 3 $\forall a<b$ réels, $\ell([a,b]) = \ell(]a,b[) = b-a$

pas 4 unicité (cls mono - paragraphe suivant)

Démo pas 1 $\ell(A) \in [0,+\infty]$, bien définie (i.e. ens $\neq \emptyset$), $\forall A \subset \mathbb{R}$

$\bigcup_{i\geq 0}]-i,i[= \mathbb{R}$ recouvre tout A

- $\ell(\emptyset) = 0$ car $\emptyset \subset]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\forall \varepsilon>0$ et donc $0 \leq \ell(\emptyset) \leq 2\varepsilon \to 0$
- $A\subset B$: tout recouvrement de B est un recouvrement de A donc inéga infimum donc $\ell(A)\leq \ell(B)$
- (A_n) parties de $\mathbb{R}$, $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$. Ou bien $\exists\, p$ t.q. $\ell(A_p) = +\infty$ et alors $\sum_{n\geq 0} \ell(A_n) = +\infty$ donc $\ell(A) \leq +\infty = \sum_{n\geq 0}\ell(A_n)$. Ou bien $\ell(A_n) < \infty$, $\forall n$. Pour chaque n soit $(]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[)_i$ recouvrement de A_n t.q. $\sum_{i\geq 0}(b_i^{(n)}-a_i^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \ell(A_n) \leq \sum_{i\geq 0}(b_i^{(n)}-a_i^{(n)})$

Ainsi $(]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[)_{i,n}$ recouvrement dénombrable de $\bigcup_{n\geq 0} A_n = A$

$$\ell(A) \leq \sum_{i,n}(b_i^{(n)}-a_i^{(n)}) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\geq 0}(b_i^{(n)}-a_i^{(n)})\right) \leq \sum_{n\geq 0}\left(\ell(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\ell(A_n) + 2\varepsilon$$ et comme ε arbitraire $\Rightarrow$ concl $\square$

Démo pas 2 Il suffit de m.q. $\mathcal{M}_\ell \supset \{]-\infty,x] : x\in\mathbb{R}\}$ car alors $\mathcal{M}_\ell \supset \underbrace{\sigma(]-\infty,x] : x\in\mathbb{R})}_{=\mathcal{B}(\mathbb{R})}$

On fixe x qque et soit $I =]-\infty,x]$. On m.q. $I\in\mathcal{M}_\ell$ autrement dit

$$\ell(A) = \ell(A\cap I) + \ell(A\cap I^c), \ \forall A\subset\mathbb{R}$$

Or $\quad \ell(A) = \ell\big((A\cap I)\cup(A\cap I^c)\big) \leqslant \ell(A\cap I) + \ell(A\cap I^c)$ arbitraire

Montrons l'inég. contraire. On recouvre A par $\bigcup_{i\geqslant 0}]a_i, b_i[$ et alors

- d'une part

$$A\cap I \subset]-\infty, x] \cap \Big(\bigcup_{i\geqslant 0}]a_i, b_i[\Big) = \bigcup_{i\geqslant 0} \underbrace{\big(]-\infty, x] \cap]a_i, b_i[\big)}_{= \begin{cases} \emptyset \text{ si } x \leqslant a_i \\ ]a_i, x] \text{ si } a_i < x < b_i \\ ]a_i, b_i[\text{ si } x \geqslant b_i \end{cases}}$$

donc $$A\cap I \subset \bigcup_{i\geqslant 0} \Big] \min(x, a_i), \min(x, b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big[$$

- d'autre part

$$A\cap I^c =]x, +\infty[\cap \Big(\bigcup_{i\geqslant 0}]a_i, b_i[\Big) = \bigcup_{i\geqslant 0} \underbrace{\big(]x, +\infty[\cap]a_i, b_i[\big)}_{= \begin{cases}]a_i, b_i[\text{ si } x \leq a_i \\ ]x, b_i[\text{ si } a_i < x < b_i \\ \emptyset \text{ si } b_i \leqslant x \end{cases}}$$

donc $$A\cap I^c \subset \bigcup_{i\geqslant 0}]\max(x, a_i), \max(x, b_i)[$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \ell(A\cap I) + \ell(A\cap I^c) &\leqslant \sum_{i\geqslant 0}\Big(\min(x, b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} - \min(x, a_i)\Big) + \sum_{i\geqslant 0}\big(\max(x, b_i) - \max(x, a_i)\big) \\ &= \sum_{i\geqslant 0}\Big(\min(x, b_i) + \max(x, b_i) - \min(x, a_i) - \max(x, a_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) \\ &= \sum_{i\geqslant 0}(b_i - a_i) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

et comme $\varepsilon > 0$ arbitraire

$\ell(A\cap I) + \ell(A\cap I^c) \leqslant \sum_{i\geqslant 0}(b_i - a_i)$ et comme recouvrement arbitraire $\Rightarrow$ inég. $\square$

<u>Démo pas 3</u> $\quad$ M.q. $\ell([a,b]) = b-a$ car ensuite $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset]a,b[\subset [a,b]$ $\forall \varepsilon \in \,]0, \frac{b-a}{2}[$

et ensuite croissance ℓ

$$b-a-2\varepsilon = \ell([a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \leqslant \ell(]a,b[) \leqslant \ell([a,b]) = b-a$$

"$\leqslant$" $\forall \varepsilon > 0$, $[a,b] \subset]a-\varepsilon, b+\varepsilon[\Rightarrow \ell([a,b]) \leqslant b-a+2\varepsilon$ et ε qqc $\Rightarrow \ell([a,b]) \leqslant b-a$

"$\geqslant$" soit $[a,b] \subset \bigcup_{i\geqslant 0}]a_i, b_i[$ par compacité une extraction de recouvrement fini

$[a,b] \subset \bigcup_{i=0}^{N}]a_i, b_i[$. On m.q. (récurrence sur N) $b-a \leqslant \sum_{i=0}^{N}(b_i - a_i)$ $(*)$

De plus $\sum_{i=0}^{N}(b_i - a_i) \leqslant \sum_{i\geqslant 0}(b_i - a_i)$ donc pour tout recouvrement $b-a \leq \sum_{i\geqslant 0}(b_i - a_i) \Rightarrow b-a \leqslant \ell([a,b])$

$(*)$ $N=0$: $[a,b] \subset]a_0, b_0[\Rightarrow a_0 \leq a, b_0 \geq b \Rightarrow b-a \leq b_0 - a_0$

$N \Rightarrow N+1$

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=0}^{N+1}]a_i, b_i[$$

$b \in \bigcup_{i=0}^{N+1}]a_i, b_i[\Rightarrow \exists i_0$ tq $b \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$ par exp($i = N+1$

- ou bien $a_{N+1} < a$ alors $[a,b] \subset]a_{N+1}, b_{N+1}[$ et alors

$$b-a \leq b_{N+1} - a_{N+1} \leq \sum_{i=0}^{N+1} (b_i - a_i)$$

- ou bien $a \leq a_{N+1} < b$ (car $b \in]a_{N+1}, b_{N+1}[$

$$b-a = \underbrace{b - a_{N+1}}_{\leq b_{N+1} - a_{N+1}} + a_{N+1} - a$$

ici on utilise l'hypothèse de récurrence

car

$$[a, a_{N+1}] \subset \bigcup_{i=0}^{N}]a_i, b_i[$$

car $[a, a_{N+1}] \cap]a_{N+1}, b_{N+1}[= \emptyset$

donc $\Downarrow$

$$a_{N+1} - a \leq \sum_{i=0}^{N} (b_i - a_i)$$

$$b-a \leq \sum_{i=0}^{N+1} (b_i - a_i)$$

$\boxtimes$