UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master 2ème année Recherche
Année 2012/2013

Méthodes d'analyse pour processus stochastiques : devoir en classe

mardi 19 mars 2013 - durée 3 heures - documents de cours autorisés

Exercice I.

Pour $n \geqslant 1$ entier on introduit les processus continus à valeurs réelles $\{Z_n(t) : t \in [0,1]\}$. On suppose que la suite $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Z dans l'espace $E = \mathrm{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et on introduit

$$V_n := \int_0^1 h(Z_n(s))ds \quad \text{et} \quad V := \int_0^1 h(Z(s))ds.$$

Montrer que $\{V_n\}_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers V. Que pouvez-vous dire de la suite $\{(Z_n, V_n)\}_{n\geqslant 1}$?

Exercice II.

Considérons $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ des probabilités sur un espace métrique $(E, \mathcal{B}(E))$ et supposons que la suite $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ converge étroitement vers Q. Soient f et g deux fonctions continues sur E à valeurs réelles telles que $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in E$. On suppose que :

$$\int_E g\, dQ_n < \infty, \forall n \geqslant 1, \quad \int_E g\, dQ < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_E g\, dQ_n = \int_E g\, dQ.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E f\, dQ_n = \int_E f\, dQ$.

On pourra introduire la fonction $h_\varepsilon(x) = 1/(1 + \varepsilon g(x))$, $x \in E$, $\varepsilon > 0$.

Exercice III.

Soit $F : E \to S$ une bijection continue entre deux espaces métriques séparables. Considérons $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités exponentiellement tendue sur $(E, \mathcal{B}(E))$ et notons $Q^\varepsilon = P^\varepsilon \circ F^{-1}$. On suppose que la famille $\{Q^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $(S, \mathcal{B}(S))$ avec fonction de taux J. Montrer que la famille $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec bonne fonction de taux $I = J \circ F$.

Pour obtenir la minoration du p.g.d. on pourra procéder comme suit :

- soient un ouvert $O \subset E$ et $x \in O$ arbitraires ; on note $\ell = I(x)$ et $K_\ell \subset E$ le compact donné par la tension exponentielle de $\{P^\varepsilon\}$: montrer que $x \in K_\ell$ en utilisant la continuité de F et la minoration du p.g.d. pour $\{Q^\varepsilon\}$;
- montrer que $F(O \cap K_\ell)$ est un voisinage de $F(x)$ pour la topologie induite sur $F(K_\ell)$ et déduire qu'il existe un voisinage ouvert G de $F(x)$ dans S tel que $G \subset F(O \cap K_\ell) \cup F(K_\ell)^c = F(O \cup K_\ell^c)$;
- en utilisant la minoration du p.g.d. pour $\{Q^\varepsilon\}$ montrer que

$$\max\{\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(O), \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(K_\ell)\} \geqslant -J(F(x)) = -I(x) = -\ell,$$

  déduire la minoration pour $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(O)$ et conclure.

Exercice IV.

Soient $\{B_t : t \in [0,1]\}$ un mouvement brownien réel issu de 0 et $\{b_t = B_t - tB_1 : t \in [0,1]\}$ le pont brownien. Pour $\varepsilon > 0$, notons Q^ε la loi du processus $\{\sqrt{\varepsilon}\, b_t : t \in [0,1]\}$. Montrer que la famille de probabilités $\{Q^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $\mathrm{C}_0([0,1];\mathbb{R})$ et trouver la fonction de taux. La limite $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M^2} \log \mathrm{P}(\sup_{t\in[0,1]} b_t \geqslant M)$ existe-t-elle ? Si oui calculer sa valeur. On pourra commencer par étudier la même limite avec B à la place de b. Rappel : $\mathrm{P}(\sup_{t\in[0,1]} B_t \geqslant M) \sim_{M\to\infty} 2/(M\sqrt{2\pi})e^{-M^2/2}$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice V.

Soit $\{B_t : t \in [0,1]\}$ le mouvement brownien standard issu de 0 et soit $g \in \mathrm{L}^2([0,1])$. On introduit la variable aléatoire $U := \int_0^1 g(s) B_s ds$.

1. Calculer la décomposition en chaos de Wiener de U et déduire la valeur de l'intégrale de Skorokhod $\int_0^1 U \, \delta B_t$.
2. Que vaut la dérivée de Malliavin $D_t V$, où $V := \int_0^1 B_s ds$. En déduire la formule de Clark-Ocone satisfaite par V ?

Exercice VI.

1. Soit F une variable aléatoire telle que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $DF = 0$. Montrer que $F = \mathrm{E}(F)$.
   On pourra utiliser la décomposition en chaos de Wiener de F.
2. Pour A un événement aléatoire, montrer que $\mathbb{1}_A \in \mathbb{D}^{1,2}$ si et seulement si $\mathrm{P}(A) \in \{0,1\}$.
   On pourra utiliser le point précédent : introduire la fonction $g \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(x) = x^2$, pour $x \in [0,1]$, et appliquer la dérivation composée pour calculer la valeur de $D\mathbb{1}_A$.