Méthodes d'analyse pour processus stochastiques : devoir maison no. 4
- à rendre pour le **8 mars 2013** -

Exercice I. Soit $g \in \mathrm{L}^2([0,1])$ et notons $\|g\| = \|g\|_{\mathrm{L}^2([0,1])}$.

1. On considère la variable aléatoire
$$F := \exp\Big(\int_0^1 g(s)dW_s - \frac{1}{2}\|g\|^2\Big),$$
où W est un movement brownien standard. Montrer que la projection sur le n-ième chaos de Wiener est
$$J_nF = \|g\|^n H_n\left(\frac{\int_0^1 g(s)dW_s}{\|g\|}\right),$$
où H_n est le n-ième polynôme de Hermite défini au DM3 Ex. I5.
2. Déduire le développement en chaos de Wiener de
$$G := \exp\Big(\int_0^1 g(s)dW_s\Big).$$
3. Utiliser le résultat du point précédent pour calculer la dérivée de Malliavin D_tG de G. Retrouver le résultat en utilisant la formule de dérivée composée $D_tG = GD_tH$, où $G =: e^H$. Que vaut $D_t\exp(W_1)$?
4. Vérifier "à la main" la formule de Clark-Ocone pour la variable aléatoire $K := \exp(W_1)$.
5. Vérifier l'égalité
$$\int_0^1\Big(\int_0^1 g(s)dW_s\Big)\delta W_t = W_1\Big(\int_0^1 g(t)dW_t\Big) - \int_0^1 g(t)dt.$$

Exercice II. On considère $\{\mu_t : t \geqslant 0\}$ une famille tendue de mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose qu'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que les fonctions caractéristiques des μ_t ont la forme suivante
$$\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\mu_t(dx) = e^{t\psi(u)}, \quad t \geqslant 0,\ u \in \mathbb{R}.$$

1. Que vaut μ_0 ? Montrer que μ_t converge étroitement vers μ_0 lorsque $t \to 0$.
2. On introduit les opérateurs T_t donnés par
$$T_tf(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mu_t(dy),$$
pour $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que T_t constitue un semi-groupe de Feller, appelé semi-groupe de convolution. Comment peut-on justifier cette appellation ?
3. Soit A le générateur infinitesimal du semi-groupe T_t. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\psi(u)| \leqslant c(1+|u|^2)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est à support compact, alors la transformée de Fourrier de Af est $\widehat{Af}(u) = \widehat{f}(u)\psi(u)$, où $\widehat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux}f(x)dx$.