Méthodes d'analyse pour processus stochastiques : devoir maison no. 2

- à rendre pour le **5 février 2013** -

Exercice I.

Soit $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités sur un espace métrique séparable $(E, \mathcal{B}(E))$ satisfaisant un principe de grandes déviations avec une bonne fonctionnelle de taux $I : E \to [0, \infty]$. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $M > 0$ on introduit la quantité

$$\Delta_M := \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{\{F>M\}} e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon.$$

et on suppose que F satisfait la condition $\lim_{M\to\infty} \Delta_M = -\infty$.

A. Montrer que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_C e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \leqslant \sup_C (F - I), \qquad \text{pour } C \subset E \text{ fermé}$$

et

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_O e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \geqslant \sup_O (F - I), \qquad \text{pour } O \subset E \text{ ouvert.}$$

Que vaut $\lim\limits_{M\to\infty} \inf\{I(x) - F(x) : x \in E \text{ tel que } F(x) > M\}$?

B. On introduit la famille de mesures, définies par

$$Q_F^\varepsilon(A) := \frac{1}{Z_F^\varepsilon} \int_A e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon,\ \forall A \in \mathcal{B}(E),\ \varepsilon > 0,$$

où Z_F^ε sont des constantes.

1. Pour quel choix des constantes Z_F^ε les mesures Q_F^ε sont des probabilités ? Calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log Z_F^\varepsilon$.
2. Montrer que la famille de probabilités $\{Q_F^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle de taux
$$I_F(x) := \sup_E (F - I) - (F(x) - I(x)),\ x \in E.$$
3. Prouver que I_F est une bonne fonctionnelle de taux. Considérer deux situations : F majorée ou non. Lorsque F n'est pas majorée, on pourra prendre une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ dans un ensemble de niveau de I_F et on pourra étudier les deux cas, $\sup_{n\geqslant 1} F(x_n) < \infty$ ou $= \infty$.

Exercice II.

Soit $(w_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$. Considérons le processus continu adapté $(x_t)_{t\in[0,1]}$ tel que

$$x_t = w_t - \int_0^t x_s ds, \quad t \in [0, 1].$$

Notons $E = \mathrm{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\mu = \mathrm{P} \circ x_\bullet^{-1}$ la loi de $x_\bullet$ et, pour $\varepsilon > 0$, μ_ε la loi de $x_\bullet^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} x_\bullet$. Montrer que la famille $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations de trois manières et indiquer à chaque fois comment obtenir la fonctionnelle de taux I :

1. utiliser le théorème de Donsker-Varadhan en montrant d'abord que μ est une mesure gaussienne centrée sur E de covariance $C(\lambda, \eta) = \int_{[0,1]^2} \kappa(s, t)\lambda(ds)\eta(dt)$, $\lambda, \eta \in E^\star$, où $\kappa(s, t) := (e^{-|s-t|} - e^{-(s+t)})/2$; on pourra introduire l'application $S : H \to E$ donnée par $S(f)(t) := \int_0^t e^{-(t-s)} f(s)ds$, $t \in [0, 1]$, avec $H = \mathrm{L}^2([0, 1], \mathbb{R})$;
2. utiliser le théorème de Schilder ainsi que l'égalité $x_\bullet^{(\varepsilon)} = F(\sqrt{\varepsilon} w_\bullet)$, où $F : E \to E$ est telle que $F(g)(t) = g(t) - \int_0^t F(g)(s)ds$, $t \in [0, 1]$;
3. utiliser le théorème de Freidlin-Wentzell.