Méthodes d'analyse pour processus stochastiques : devoir maison no. 1
- à rendre pour le **22 janvier 2013** -

Exercice I. Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique séparable E qui converge faiblement vers X.

1. Supposons que $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ est une autre suite de variables aléatoires à valeurs dans E telle que $\mathrm{d}(X_n, Z_n)$ converge vers 0 en probabilité, d étant la métrique de l'espace E. Montrer que Z_n converge faiblement vers X.
2. Supposons que E est un espace vectoriel normé séparable et soit $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de constantes qui converge vers c. Montrer que c_nX_n converge faiblement vers cX.

Exercice II.

1. Soit $\{Q_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de probabilités sur un espace métrique séparable $(E, \mathcal{B}(E))$. Montrer que Q_n converge étroitement vers une probabilité Q si et seulement si
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f\,dQ_n = \int_E f\,dQ, \quad \forall f : E \to \mathbb{R} \text{ uniformément continue et bornée.}$$
2. Soit $\mathcal{L}$ la famille des fonctions continues sur $f : E \to \mathbb{R}$ telles que
$$\sup_{x\in E} |f(x)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{d}(x,y), \forall x, y \in E,$$
où d est la métrique sur E. Définissons
$$d_{\mathcal{L}}(Q, Q') = \sup_{f\in\mathcal{L}} \left| \int_E f\,dQ - \int_E f\,dQ' \right|.$$
Montrer que $d_{\mathcal{L}}$ est une métrique sur l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathcal{B}(E)$. Montrer qu'une suite de probabilités Q_n converge étroitement vers une probabilité Q si et seulement si $d_{\mathcal{L}}(Q_n, Q) \to 0$.

Exercice III.

Soit $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard issu de 0 et on considère l'eds suivante
$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1-t}dt, \quad 0 < t < 1 \quad \text{avec} \quad X_0 = 0.$$

1. Etudier l'existence et l'unicité des solutions pour cette eds. Montrer ensuite que la solution est donnée par
$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad t \in [0,1).$$
En déduire que $\{X_t\}_{t\in[0,1)}$ est un processus gaussien centré et calculer sa covariance.
2. On rappelle que le pont brownien est un processus gaussien centré défini par $b_t := B_t - tB_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Calculer sa covariance. Que peut-on remarquer ?
3. Identifier l'espace auto-réproduisant $\mathcal{H}$ associé au pont brownien $\{b_t\}_{t\in[0,1]}$.
4. Dans le contexte du principe d'invariance de Donsker (ou encore plus simplement en considérant $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathrm{P}(Y_j = 1) = \mathrm{P}(Y_j = -1) = 1/2$ et en posant $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$) on note
$$z_n(t) := \Big(S_{[nt]} + (nt - [nt])Y_{[nt]+1} - tS_n\Big)/\sqrt{n}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$
Soit Q_n la loi de z_n ; c'est une probabilité sur $\mathrm{C}([0,1])$. Montrer que Q_n converge étroitement vers Q, la loi du pont brownien.