Problème A du 28 octobre 2006

Agrégation de Mathématiques - Analyse et Probabilités

(Mihai Gradinaru)

Tout au long du problème $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité sur lequel on définit une suite $\{X_n\}_1^\infty$ de variables aléatoires réelles. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on utilisera S_n pour noter la somme partielle $X_1 + \ldots + X_n$ et $\overline{S}_n$ pour noter le rapport

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell.$$

Première partie

1. On suppose que $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{E}[X_k X_\ell] = 0$, si $k \neq \ell$.

a) Montrer que $\mathbb{E}[S_n^2] = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}[X_\ell^2]$.

b) Vérifier que pour toute variable aléatoire réelle Y on a, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon^2 \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty[}(|Y|) \leqslant Y^2 \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty[}(|Y|) \leqslant Y^2.$$

En déduire une majoration de $\mathbb{P}(|Y| \geqslant \varepsilon)$ lorsque Y est de carré intégrable.

c) Prouver que pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon^2 \mathbb{P}\left(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{E}[\overline{S}_n^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{E}[X_\ell^2] \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

d) En particulier, si $M := \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$, montrer que

$$\varepsilon^2 \mathbb{P}\left(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{E}[\overline{S}_n^2] \leqslant \frac{M}{n}.$$

e) En déduire que $\overline{S}_n \to 0$ dans L^2 et en probabilité.

2. On suppose ici que $\{X_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de carré intégrable, d'espérance m et de variance majorée par σ^2. Montrer, en utilisant les résultats du point **1**, que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon^2 \mathbb{P}\left(|\overline{S}_n - m| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{E}\left[(\overline{S}_n - m)^2\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{n}.$$

En déduire que $\overline{S}_n \to m$ dans L^2 et en probabilité.

3. Une famille $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de variables aléatoires est dite *uniformément intégrable* si

$$\lim_{R \uparrow \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| > R\}}\right] = 0.$$

On supposera dans cette question que la suite $\{X_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ de variables aléatoires indépendantes est uniformément intégrable.

Tournez la page S.V.P.

a) On suppose que $\mathbb{E}[X_n]=0$. Pour chaque $R\in]0,\infty[$ on définit $f_R(t):=t\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)$, $t\in\mathbb{R}$,

$$m_n^{(R)}:=\mathbb{E}[f_R\circ X_n],\ X_n^{(R)}:=f_R\circ X_n-m_n^{(R)},\ \text{ et } Y_n^{(R)}:=X_n-X_n^{(R)}.$$

On pose

$$\overline{S}_n^{(R)}:=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n X_\ell^{(R)} \text{ et } \overline{T}_n^{(R)}:=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n Y_\ell^{(R)}$$

Justifier les inégalités:

$$\mathbb{E}\left[|\overline{S}_n|\right]\leqslant\mathbb{E}\left[|\overline{S}_n^{(R)}|\right]+\mathbb{E}\left[|\overline{T}_n^{(R)}|\right]$$

$$\leqslant\mathbb{E}\left[|\overline{S}_n^{(R)}|^2\right]^{\frac{1}{2}}+2\max_{1\leqslant\ell\leqslant n}\mathbb{E}\left[|X_\ell|\mathbb{1}_{\{|X_\ell|>R\}}\right]\leqslant\frac{R}{\sqrt{n}}+2\max_{\ell\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left[|X_\ell|\mathbb{1}_{\{|X_\ell|>R\}}\right]$$

b) En déduire que pour chaque $R>0$,

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[|\overline{S}_n|\right]\leqslant 2\max_{\ell\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left[|X_\ell|\mathbb{1}_{\{|X_\ell|>R\}}\right].$$

c) Montrer que sous les hypothèses du point **3** on a

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n(X_\ell-\mathbb{E}[X_\ell])\to 0 \text{ dans } \mathrm{L}^1$$

et donc en probabilité.

d) En particulier, prouver que si $\{X_n : n\in\mathbb{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables, identiquement distribuées, alors $\overline{S}_n\to\mathbb{E}[X_1]$ dans L^1 et en probabilité.

4. Soient $X_1,\dots,X_n,\dots$ des variables aléatoires indépendantes et supposons que

$$F(R):=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}R\mathbb{P}\left(|X_n|>R\right)\to 0 \text{ lorsque } R\to\infty.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $X_\ell^{(n)}=X_\ell\mathbb{1}_{\{|X_\ell|\leqslant n\}}$, $m_\ell^{(n)}=\mathbb{E}\left[X_\ell^{(n)}\right]$ et $\check{X}_\ell^{(n)}=X_\ell^{(n)}-m_\ell^{(n)}$, $\ell=1,\dots,n$.

a) Soit $m_n:=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n m_\ell^{(n)}$. Préciser le terme Z_n de l'égalité $\overline{S}_n-m_n=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n\check{X}_\ell^{(n)}+Z_n$.

b) Soit les événements $A:=\{|\overline{S}_n-m_n|\geqslant\varepsilon\}$ et $B:=\{\max_{1\leqslant\ell\leqslant n}|X_\ell|\leqslant n\}$. Utiliser l'égalité précédente pour exprimer simplement $A\cap B$.

c) Montrer que, pour chaque $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}(|\overline{S}_n-m_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{(n\varepsilon)^2}\sum_{\ell=1}^n\mathbb{E}\left[X_\ell^2\mathbb{1}_{\{|X_\ell|\leqslant n\}}\right]+\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant\ell\leqslant n}|X_\ell|>n\right).$$

Tournez la page S.V.P.

d) Vérifier que pour toute variable aléatoire Y de carré intégrable

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) \leqslant \mathbb{E}[Y^2] = 2\int_0^\infty t\mathbb{P}(|Y| > t)dt.$$

e) En déduire que

$$\mathbb{P}(|\overline{S}_n - m_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2}{n\varepsilon^2}\int_0^n F(t)dt + F(n).$$

f) Conclure que $|\overline{S}_n - m_n| \to 0$ en probabilité.

5. Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de Poisson d'espérance t.

a) Montrer que S_n est de loi de Poisson d'espérance nt et que pour chaque $T \in [0, \infty[$ et $t \in]0, \infty[$,

$$e^{-nt}\sum_{k\leqslant nT}\frac{(nt)^k}{k!} = \mathbb{P}(\overline{S}_n \leqslant T).$$

b) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nt}\sum_{k\leqslant nT}\frac{(nt)^k}{k!} = \begin{cases} 1 & \text{si } T > t \\ 0 & \text{si } T < t \end{cases}.$$

c) Soit $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une densité de probabilité continue bornée. On définit sa *transformée de Laplace* $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in [0, \infty[$, par

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s)ds.$$

Utiliser le point précédent pour montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\leqslant nT}\frac{(-n)^k}{k!}[D^k\hat{f}](n) = \int_0^T f(s)ds,$$

pour chaque $T \in [0, \infty[$. En déduire que f peut être retrouvée à partir de sa transformée de Laplace.

Deuxième partie

1. On donne $p \in [0, 1]$ et soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$ de loi de Bernoulli d'espérance p.

a) Calculer $\mathbb{P}(S_n = \ell)$ et montrer que pour toute $f \in \mathrm{C}([0, 1]; \mathbb{R})$, $\mathbb{E}\left[f \circ \overline{S}_n\right]$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, $B_n(p; f)$ appelé *polynôme de Bernstein*.

b) Si $\|f\|_\infty$ note la norme uniforme de f, montrer que

$$|f(p) - B_n(p; f)| \leqslant 2\|f\|_\infty\mathbb{P}(|\overline{S}_n - p| \geqslant \varepsilon) + \rho(\varepsilon; f),$$

où $\rho(\varepsilon; f) := \sup\{|f(t) - f(s)| : 0 \leqslant s < t \leqslant 1 \text{ avec } t - s < \varepsilon\}$ est le *module de continuité* de f.

Tournez la page S.V.P.

c) Prouver que

$$\|f - B_n(\cdot; f)\|_\infty \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2n\varepsilon^2} + \rho(\varepsilon; f).$$

En déduire un résultat d'approximation uniforme par des fonctions polynômiales des fonctions continues définies sur un intervalle compact.

2. Pour une fonction réelle f on introduit l'*opérateur de différence* Δ_h, pour $h > 0$, donné par

$$[\Delta_h f](t) := \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

a) Montrer que

$$(-h)^m \left[\Delta_h^{(m)} f\right](t) = \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell C_m^\ell f(t + \ell h), \text{ pour } m \in \mathbb{N}^*,$$

où $\Delta_h^{(m)}$ désigne l'iterée m-ième de l'opérateur Δ_h (on pourra faire une récurrence).

b) Justifier que, pour $h = \frac{1}{n}$,

$$B_n(p; f) = \sum_{r=0}^{n} p^r \sum_{\ell=0}^{r} C_n^\ell C_{n-\ell}^{r-\ell} (-1)^{r-\ell} f(\ell h)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-p)^r C_n^r \sum_{\ell=0}^{r} C_r^\ell (-1)^\ell f(\ell h) = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (ph)^r \left[\Delta_h^{(r)} f\right](0)$$

où $\left[\Delta_h^{(0)} f\right] \equiv f$. En déduire que

$$B_n(p; f) = \sum_{\ell=0}^{n} n^{-\ell} C_n^\ell \left[\Delta_{\frac{1}{n}}^{(\ell)} f\right](0) p^\ell \text{ pour } p \in [0,1].$$

3. Une fonction $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(]a,b[;\mathbb{R})$ est dite *absolument monotone* si sa dérivée m-ième $D^m\varphi$ est positive pour tout $m \in \mathbb{N}$. Une fonction $\varphi \in \mathrm{C}^\infty([0,1];[0,1])$ est dite *génératrice de probabilités* s'il existe une suite $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [0,1]$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 \text{ et } \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \text{ pour } t \in [0,1].$$

a) Montrer que si φ est une fonction génératrice de probabilités alors sa restriction sur $]0,1[$ est absolument monotone.

b) Soit ψ est une fonction absolument monotone sur $]a,b[$ et soit $h \in]0, b-a[$. Montrer que $[D \circ \Delta_h \psi] = [\Delta_h \circ D\psi]$ sur $]a, b-h[$ et que sur le même intervalle $h\,[D^m \circ \Delta_h \psi](t) \geqslant 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Donc $[\Delta_h \psi]$ est absolument monotone sur $]a, b-h[$.

c) On veut montrer que si $\varphi \in \mathrm{C}([0,1];\mathbb{R})$, avec $\varphi(1) = 1$, a sa restriction sur $]0,1[$ absolument monotone, alors

$$(*) \qquad \left[\Delta_{\frac{1}{n}}^{(m)} \varphi\right](0) \geqslant 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant m \leqslant n.$$

Tournez la page S.V.P.

Prouver que $\left[\Delta_h^{(m)}\varphi\right]$ est absolument monotone sur $]0,1-mh[$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $h>0$ tel que $mh<1$. En déduire que $\left[\Delta_h^{(m)}\varphi\right](0) \geqslant 0$ si $mh<1$ et ensuite prendre $h=\frac{1}{n}$ pour conclure.

d) Enfin, on veut montrer que si la fonction $\varphi \in \mathrm{C}([0,1];\mathbb{R})$, avec $\varphi(1)=1$, satisfait la condition (*) alors c'est une fonction génératrice de probabilités. On pose $\varphi_n = B_n(\cdot;\varphi)$. Montrer que φ_n est une fonction génératrice de probabilités et que $\varphi_n(1)=1$ (on pourra utiliser le résultat du point **2 b)** de cette même partie).

e) Montrer que la limite uniforme de fonctions génératrices de probabilités est elle-même une fonction génératrice de probabilités. Conclure la phrase du point **d)**.

Troisième partie

Dans cette partie on supposera que les variables aléatoires $\{X_n\}_1^\infty$ sont indépendantes de même loi *gaussienne standard*. On note $\gamma : \mathbb{R} \to]0,\infty[$, $\gamma(y) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-y^2/2\right]$, $y \in \mathbb{R}$ la densité.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(\overline{S}_n \in B) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_B \exp\left[-\frac{ny^2}{2}\right] dy,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

2. En déduire que, pour tout borélien B,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left[\mathbb{P}(\overline{S}_n \in B)\right] = -\operatorname{inf\,ess}\left\{\frac{|y|^2}{2} : y \in B\right\}$$

(au signe près *l'infimum essentiel* ci-dessus est le plus grand réel majoré par $\frac{|y|^2}{2}$ pour presque tout $y \in B$). On pourra utiliser la propriété connue suivante :

(#) Soit f une fonction positive mesurable sur un espace mesurable$(E,\mathcal{F},\mu)$. Alors :

$$\text{si } \mu(E)<\infty \text{ ou si } f \text{ est } \mu\text{-intégrable} \Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mu)} = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}.$$

3. Montrer que

$$(x^{-1}-x^{-3})\gamma(x) \leqslant \int_x^\infty \gamma(y)dy \leqslant x^{-1}\gamma(x) \text{ pour tout } x \in]0,\infty[.$$

On pourra calculer les dérivées des quantités en question.

4. En déduire

$$\sqrt{\frac{2}{n\pi\varepsilon^2}}\left(1-\frac{1}{n\varepsilon^2}\right)\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \sqrt{\frac{2}{n\pi\varepsilon^2}}\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

5. Que deviennent les résultats des points **2** et **4** ci-dessus lorsque la loi commune des X_n est la loi gaussienne d'espérance m et de variance σ^2?

Tournez la page S.V.P.

Quatrième partie

Dans toute cette partie on supposera que $\{X_n\}_1^\infty$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

1. On supposera de plus que les variables X_n sont de carré intégrable. On veut prouver l'inégalité :

$$(\star) \qquad \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\left|\sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell - \mathbb{E}[X_\ell])\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n),$$

pour chaque $\varepsilon > 0$. On peut supposer, sans perte de généralité, que chaque X_n est de moyenne nulle.

a) Soit $1 \leqslant n < N$. Montrer que $S_N^2 - S_n^2 \geqslant 2(S_N - S_n)S_n$. Justifier que la variable aléatoire $S_N - S_n$ est indépendante de la tribu $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$. En déduire que

$$\mathbb{E}\left[S_N^2 \mathbb{1}_{A_n}\right] \geqslant \mathbb{E}\left[S_n^2 \mathbb{1}_{A_n}\right] \text{ pour tout } A_n \in \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

b) On note

$$A_1 := \{|S_1| \geqslant \varepsilon\},\ A_{n+1} := \{|S_{n+1}| \geqslant \varepsilon \text{ et } \max_{1\leqslant \ell \leqslant n}|S_\ell| < \varepsilon\},\ n \in \mathbb{N}^*$$

et $B_N := \{\max_{1\leqslant n\leqslant N}|S_n| \geqslant \varepsilon\}$. Montrer que $B_N = \cup_{n=1}^N A_n$ et que $\mathbb{P}(B_N) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n)$. En déduire

$$\mathbb{E}\left[S_N^2 \mathbb{1}_{B_N}\right] \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{P}(B_N).$$

c) Déduire l'inégalité $(\star)$ (on pourra, après l'avoir justifié, faire tendre N vers ∞).

2. Supposons que les variables X_n sont de carré intégrable et que $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) < \infty$. Montrons que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathbb{E}[X_n]) \text{ converge presque sûrement.}$$

À nouveau, on peut supposer que chaque X_n est de moyenne nulle. Appliquer l'inégalité $(\star)$ à la suite $\{X_{N+n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ pour vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n>N}|S_n - S_N| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\mathbb{E}\left[X_n^2\right].$$

En déduire que $\{S_n\}_1^\infty$ est une suite de Cauchy presque sûrement. On pourra vérifier, par exemple que $\lim_{M\to\infty}\sup_{n,m\geqslant M}|S_n - S_m| = 0$ presque sûrement.

3. Soit $\{b_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite croissante de nombres positifs qui tend vers ∞.

a) On pose $b_0 := 0$ et $\beta_n := b_n - b_{n-1}$. Soit $\{s_n\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ une suite qui converge vers $s \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^n \beta_\ell s_\ell \to s$. On pourra supposer $s = 0$ et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_ε tel que si $n > N_\varepsilon$,

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n}\beta_\ell s_\ell\right| \leqslant \frac{M\, b_{N_\varepsilon}}{b_n} + \varepsilon,$$

où $M := \sup_{n\geqslant 1}|s_n|$.

Tournez la page S.V.P.

b) Soit $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{b_n}$ soit une série convergente. Montrer que, lorsque $n \to \infty$, $\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^n x_\ell \to 0$. On pourra prendre $s_0 := 0$, noter $s_n := \sum_{\ell=1}^n \frac{x_\ell}{b_\ell}$, montrer que

$$\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^n x_\ell = s_n - \frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^n \beta_\ell s_{\ell-1}.$$

et appliquer ensuite le point précédent **a)**.

c) Montrer que si les variables X_n sont de carré intégrable et telles que $\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)}{b_n^2}$ soit une série convergente, alors

$$\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^n (X_\ell - \mathbb{E}[X_\ell]) \to 0 \text{ presque sûrement.}$$

d) En déduire que si les variables indépendantes $\{X_n\}_1^\infty$ sont de carré intégrable et de même loi, alors $\overline{S}_n \to m$ presque sûrement (m est l'espérance commune).

4. Dans cette partie on supposera que les variables indépendantes et de même loi $\{X_n\}_1^\infty$ sont seulement intégrables. On notera m l'espérance commune. Le but de ce qui suit est de démontrer que le résultat du point **3 d)** de cette même partie reste vrai : lorsque $n \to \infty$, $\overline{S}_n \to m$ presque sûrement. On pourra supposer que $m = 0$.

a) Soit $Y_n := X_n \mathbb{1}_{[0,n]}(|X_n|)$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n \mathbb{P}(|X_1| > t)dt = \mathbb{E}[X_1].$$

En déduire $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall N \geqslant n, Y_N = X_N) = 1$. On rappelle la première partie du *lemme de Borel-Cantelli* :

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}^*\}) = 0.$$

b) Montrer que, si on pose $\overline{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n Y_\ell$, alors pour $\mathbb{P}$-presque tous $\omega \in \Omega$

$$\overline{T}_n(\omega) \to 0 \text{ si et seulement si } \overline{S}_n(\omega) \to 0.$$

c) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}[Y_\ell] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_1 \mathbb{1}_{|X_1| \leqslant n}\right] = 0.$$

On pourra utiliser l'hypothèse $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et le point **3 a)** de cette même partie.

d) On pose $C := \sup_{\ell \in \mathbb{N}^*} \ell \sum_{n=\ell}^\infty \frac{1}{n^2}$. Vérifier que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{E}\left[Y_n^2\right]}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}\left[X_1^2 \mathbb{1}_{\ell-1 < X_1 \leqslant \ell}\right] \leqslant C \sum_{\ell=1}^\infty \frac{1}{\ell}\mathbb{E}\left[X_1^2 \mathbb{1}_{\ell-1 < X_1 \leqslant \ell}\right]$$
$$\leqslant C\mathbb{E}[|X_1|].$$

Conclure en utilisant le point **3 c)** de cette même partie.

Tournez la page S.V.P.

Cinquième partie

Pour une variable aléatoire réelle Y, on dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une *médiane* de Y et on écrit $\alpha \in \operatorname{med}(Y)$ si

$$\min\left\{\mathbb{P}(Y \leqslant \alpha), \mathbb{P}(Y \geqslant \alpha)\right\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Toute variable aléatoire admet une médiane et de plus

$$\alpha := \inf\left\{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y \leqslant t) \geqslant \frac{1}{2}\right\}$$

est une médiane de Y. En général, une variable aléatoire admet tout un intervalle non-trivial de médianes.

Dans toute la suite, $\{X_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

1. Pour $k \leqslant \ell$, on choisit $\alpha_{\ell,k} \in \operatorname{med}(S_\ell - S_k)$. On veut montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$

$$(\P) \qquad \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant n\leqslant N} |S_n + \alpha_{N,n}| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(|S_N| \geqslant \varepsilon\right).$$

a) On pose $A_1 := \{S_1 + \alpha_{N,1} \geqslant \varepsilon\}$ et

$$A_{n+1} := \left\{\max_{1\leqslant \ell\leqslant n} (S_\ell + \alpha_{N,\ell}) < \varepsilon \text{ et } S_{n+1} + \alpha_{N,n+1} \geqslant \varepsilon\right\}, \text{ pour } 1 \leqslant n < N.$$

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\max_{1\leqslant n\leqslant N} (S_n + \alpha_{N,n}) \geqslant \varepsilon).$$

b) Montrer que $\{S_N \geqslant \varepsilon\} \supset A_n \cap \{S_N - S_n \geqslant \alpha_{N,n}\}$, pour chaque $1 \leqslant n \leqslant N$. Justifier que A_n et $\{S_N - S_n \geqslant \alpha_{N,n}\}$ sont deux événements indépendants et déduire que

$$\mathbb{P}(S_N \geqslant \varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(\max_{1\leqslant n\leqslant N} (S_n + \alpha_{N,n}) \geqslant \varepsilon).$$

Obtenir $(\P)$.

2. On suppose de plus que la suite $\{S_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire réelle S.

a) Montrer qu'il existe un rang M_1 tel que pour tous $M_1 \leqslant k \leqslant \ell$ on a $|\alpha_{\ell,k}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et qu'il existe un rang M_2 tel que pour chaque $M \geqslant M_2$,

$$\sup_{N\geqslant 1} \mathbb{P}\left(|S_{N+M} - S_M| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) Soit $M := \max\{M_1, M_2\}$. Appliquer l'inégalité $(\P)$ à la suite $\{X_{n+M} : n \in \mathbb{N}^*\}$ pour déduire que, pour $N \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant \ell\leqslant N} |S_{\ell+M} - S_M| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant \ell\leqslant N} |S_{\ell+M} - S_M + \alpha_{N+M,\ell+M}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) < \varepsilon.$$

c) En déduire que S_n converge vers S presque sûrement.

Tournez la page S.V.P.

Sixième partie

Une variable aléatoire est dite *symétrique* si $-X$ a la même loi que X. Il est clair que les sommes de variables aléatoires indépendantes symétriques sont encore des variables aléatoires symétriques.

Une fois de plus les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes et on supposera qu'elles sont symétriques.

1. On pose $M_n(\omega) = \max_{1 \leqslant \ell \leqslant n} |X_\ell(\omega)|$ et soit $\tau_n(\omega)$ le plus petit ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant n$ avec la propriété que $|X_\ell(\omega)| = M_n(\omega)$. On note $Y_n(\omega) = X_{\tau_n(\omega)}(\omega)$ et $\hat{S}_n = S_n - Y_n$.

a) Montrer que les couples aléatoires

$$\omega \in \Omega \mapsto (\hat{S}_n(\omega), Y_n(\omega)) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \omega \in \Omega \mapsto (-\hat{S}_n(\omega), Y_n(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$

ont la même loi.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant t) \leqslant 2\mathbb{P}\left(Y_n \geqslant t \text{ et } \hat{S}_n \geqslant 0\right) \leqslant 2\mathbb{P}(S_n \geqslant t)$$

c) Montrer ensuite que

$$(\flat) \qquad \mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant \ell \leqslant n} |X_\ell| \geqslant t\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant t\right), \, t \in [0, \infty[.$$

2. Supposons de plus que les variables X_n aient toutes la même loi.

a) En utilisant l'inégalité $(\flat)$, prouver que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{S}_n| \leqslant C\right) = 1 \text{ pour un certain } C \in]0, \infty[\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\left(|X_1| \geqslant n\right) = 0.$$

b) En déduire une réciproque partielle de la question **4 d)** de la **Première partie** : si $\{X_n\}_1^\infty$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, symétriques, alors

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = 0 \text{ en probabilité } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\left(|X_1| \geqslant n\right) = 0.$$