Master et Magistère 1ère année Mathématiques 2010-2011
Probabilités de base
Indépendance. Vecteurs aléatoires gaussiens.

2.1. On dispose de deux pièces de monnaie. La première a une probabilité $\frac{1}{4}$ de donner pile et la deuxième a une probabilité $\frac{1}{2}$ de donner pile. On choisit au hasard une pièce et on effectue une série de lancers avec la règle suivante : si au n-ème lancer la pièce donne pile (respectivement face) on effectue le lancer suivant avec la même pièce (respectivement avec l'autre pièce). On note α_n la probabilité de lancer la première pièce au n-ème jet. Montrer que α_n satisfait à une relation du type $\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b$. En déduire la valeur de α_n.

2.2. Étudier l'indépendance des coordonnées des couples aléatoires (X, Y) des exercices **1.16, 1.17, 1.18, 1.22, 1.29, 1.36**.

2.3. Soit les variables aléatoires indépendantes X et Y. Calculer la loi de la somme $X + Y$ lorsque :
(i) $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$.
(ii) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.
(iii) $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(n,\tau^2)$.
(iv) $X \sim \gamma(p,\lambda)$ et $Y \sim \gamma(q,\lambda)$.
Quelle est la loi de $X^2 + Y^2$ quand $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Généraliser pour d variables.

2.4. Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{U}(1,2,\dots,n)$.
(i) Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.
(ii) Trouver la loi de $X + Y$.
(iii) On pose $U = \min\{X,Y\}$ et $V = \max\{X,Y\}$. Trouver les lois de (U,V), U et V. U et V sont-elles indépendantes ?

2.5. Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$. On pose $U = \min\{X,Y\}$ et $W = \max\{X,Y\} - U$. Trouver les lois de U et W et étudier leur indépendance.

2.6. Deux personnes ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles : les instants X et Y de leur arrivées sont deux variables aléatoires indépendantes uniformément répartis dans [14,15]. Calculer la loi de la variable T durée d'attente du premier arrivé.

2.7. Soient X et Y variables aléatoires discrètes ayant les valeurs $-1, 0, 1$ et on note $p_{i,j} = \mathrm{P}(X = i, Y = j)$.
(i) On suppose que

$$p_{1,1} = p_{-1,1} = p_{1,-1} = p_{-1,-1} = \frac{1}{4}p, \quad p_{0,1} = p_{0,-1} = p_{1,0} = p_{-1,0} = \frac{1}{4}(1-p), \quad 0 < p < 1.$$

Montrer que les variables X et Y sont non corrélées. Étudier leur indépendance. Que peut-on dire dans le cas où $p = 0$?
(ii) On suppose que

$$p_{1,1} = p_{-1,1} = \frac{1}{32}, \quad p_{1,-1} = p_{-1,-1} = p_{0,1} = p_{1,0} = \frac{3}{32}, \quad p_{0,-1} = p_{-1,0} = \frac{5}{32}, \quad p_{0,0} = \frac{8}{32}.$$

Étudier l'indépendance de X^2 et Y^2 et ensuite de X et Y.

2.8 Soit F une fonction de répartition de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(i) Si X a la fonction de répartition F, montrer que X admet une densité.
(ii) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi. Montrer que $\mathrm{P}(X = Y) = 0$ et que $\mathrm{P}(X < Y) = \frac{1}{2}$. Montrer que (X, Y) et (Y, X) ont la même loi.
(iii) Soit Z encore une variable aléatoire indépendante de (X, Y) et de même loi que X. Calculer $\mathrm{P}(X < Y < Z)$ et montrer que la valeur ne depend pas de F. Montrer que (X, Y, Z) et (Y, Z, X) ont la même loi.
(iv) Généraliser au cas de n variables aléatoires indépendantes de même loi.

2.9. Soient $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On note $U = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j$ et $V = \max_{1 \leqslant j \leqslant n}$.
(i) Calculer les fonction de répartition de U et V à l'aide de la fonction de répartition commune des X_j.
(ii) Si la loi commune des X_j admet une densité, montrer que U et V admettent des densités et les calculer.

2.10. Soient U et $X = (X_1, \dots, X_n)$ deux variables aléatoires indépendantes, U à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et X ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On note $X_U(\omega) = X_{U(\omega)}(\omega)$. Montrer que X_U est une variable aléatoire ayant une densité. Étudier ensuite le cas où $U \sim \mathcal{U}(1, 2, \dots, n)$ et les X_j sont indépendantes de même loi.

2.11. Une urne contient b boules blanches et r rouges ; une boule étant tirée, on la remet et avec elle encore c boules de la couleur tirée. On pose $p = \frac{b}{b+r}$, $q = 1 - p$, $\gamma = \frac{c}{b+r}$. On note

$$X_n = \mathbb{1}_{\{\text{la } n\text{-ème boule tirée est blanche}\}}$$

et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
(i) Trouver les lois de X_1 et X_2 en fonction de p, q, γ.
(ii) Exprimer le coefficient de corrélation de X_1 et X_2 en fonction de p, q, γ.
(iii) Trouver la loi conditionnelle de X_n sachant $S_{n-1} = k$.
(iv) Exprimer la loi de X_n en fonction de p, q, γ et $\mathrm{E}(S_{n-1})$. En déduire la loi de X_n par récurrence.

2.12. Soit $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ indépendante de $Y \sim \mathcal{U}(0, 1, \dots, n)$. Trouver la loi de $X + Y$ et calculer de deux façons l'espérance de $X + Y$.

2.13. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes dont les densités sont

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x),\ f_Y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{]0,\infty[}.$$

Trouver la loi de XY.

2.14. **(i)** Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note $U = \cos\theta X - \sin\theta Y$ et $V = \sin\theta X + \cos\theta Y$. Trouver la loi de (U, V) et de ses marginales. U, V sont-elles indépendantes ?

(ii) Soient R et Θ deux variables aléatoires indépendantes telles que $\Theta \sim \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$ et $R > 0$ avec $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$. On note $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Trouver leurs lois et étudier leur indépendance.

2.15. Soit ε une variable aléatoire discrète prenant seulement les valeurs ± 1 et soit X une variable aléatoire à densité f. On suppose que ε et X sont indépendantes.
(i) Montrer que $Y = \varepsilon X$ possède une densité et la calculer.
(ii) Si f est une fonction paire montrer que X et $-X$ ont même loi.
(iii) Montrer que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2.16. Montrer que le carré et le carré du module d'une fonction caractéristique sont aussi des fonctions caractéristiques.

2.17. Un examen consiste en 20 questions auxquelles il faut répeondre par oui ou par non ; chaque réponse juste est notée 1 point et chaque répeonse fausse, 0 points. Un étudiant répond entièrement au hasard et sa note finale est une variable aléatoire X.
(i) Soit X_j la note qu'il obtient à la j-ème question. Trouver la loi de X_j, son espérance, sa variance.
(ii) Exprimer X en fonction des X_j, donner sa loi, son espérance et sa variance.
(iii) Calculer la probabilité d'avoir une note inférieure à 5. Donner un majorant de cette probabilité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Thcebitchev.
(iv) Un étudiant sérieux estime qu'il donnera une réponse exacte à chaque question avec une probabilité de 0,8. Quelle est la loi de sa note, l'espérance et la variance. Donner une minoration pour la probabilité qu'il ait plus de 12.

2.18. *Loi beta.* Soient $a, b > 0$. Désignons par Z_a, Z_b deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\gamma(a,1)$, $\gamma(b,1)$.
i) Trouver la densité du vecteur aléatoire

$$(U,V) := \left(Z_a + Z_b, \frac{Z_a}{Z_a + Z_b}\right).$$

ii) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? (On dit que V suit une loi de $\mathrm{B}(a,b)$.)

2.19. *Loi de Cauchy et loi arcsinus.*
i) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. Montrer que la variable aléatoire $C = X/Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
ii) Soit $V \sim \mathrm{B}(1/2, 1/2)$ une variable aléatoire de loi arcsinus. Prouver que la variable aléatoire $1/V$ a la même loi que la variable aléatoire $1+C^2$, où C suit une loi de Cauchy de paramètre 1.

2.20. *Loi Fisher-Snedecor.* Soient $X \sim \gamma(a,b)$ et $Y \sim \gamma(c,d)$ deux variables aléatoires indépendantes.
i) Trouver la loi de la variable aléatoire X/Y.
ii) Supposons que $a = n/2$, $c = m/2$, $b = d = 1/2$. Trouver la loi de :

$$R := \frac{X/n}{Y/m}$$

(On dit que R suit une loi de Fisher-Snedecor à n et m degrés de liberté).
iii) Calculer $\mathrm{E}(R)$ et $\mathrm{Var}(R)$ (discussion suivant les valeurs de n et m).

2.21. *Loi Student.* Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$ deux variables aléatoires indépendantes.
i) Trouver la loi de la variable aléatoire :

$$T := \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

(On dit que T suit une loi de Student à n degrés de liberté).
ii) Calculer $\mathrm{E}(T)$ et $\mathrm{Var}(T)$.

2.22.* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi. **i)** Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes centrées réduites, alors $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
ii) *Théorème de Bernstein.* Réciproquement, on suppose que X et Y sont de carré intégrable et que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. On veut montrer que X et Y sont deux variables gaussiennes. Pour cela :
a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées, de variance 1.
b) Montrer que φ, la fonction caractéristique commune de X et de Y, satisfait l'égalité $\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t)$. En déduire que φ ne s'annule nulle part.
c) On pose $\psi(t) := \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$ et que $\psi(t) = 1 + o(t^2)$, lorsque $t \downarrow 0$. En déduire que, pour tout t, $\psi(t) = 1$ et que $\varphi(t) = \varphi(t/2)^4$. Conclure.

2.23. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite. Pour tout $a > 0$ on note :

$$Y_a := -X\mathbb{1}_{\{|X| \leqslant a\}} + X\mathbb{1}_{\{|X|>a\}}.$$

i) Montrer que Y_a est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite.
ii) Prouver que le couple (X, Y_a) n'est pas gaussien.
iii) Y-a-t il une valeur de a telle que la matrice de covariance de (X, Y_a) soit l'identité ?

2.24. Soit (X_1, X_2) un couple gaussien tel que :

$$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = 0,\ \mathrm{E}(X_1^2) = \mathrm{E}(X_2^2) = 1,\ \mathrm{E}(X_1X_2) = \rho.$$

i) Montrer que $|\rho| \leqslant 1$.
ii) Calculer la densité du couple (X_1, X_2).
iii) Retrouver, à partir du résultat de **ii)** les lois marginales de X_1 et X_2, ainsi que les quantités $\mathrm{E}(X_1), \mathrm{E}(X_2), \mathrm{E}(X_1^2), \mathrm{E}(X_2^2), \mathrm{E}(X_1X_2)$.
iv) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X_1 et X_2 soient indépendantes.
v) Que se passe-t-il quand $|\rho| = 1$?

2.25. Soit X un vecteur gaussien de dimension n, centré, de matrice de covariance K (de type $n \times n$). Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $p \times n$. On définit $Y := AX$, $Z := BX$. Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si $AKB^* = 0$.

2.26. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f(x,y) := \lambda \exp\left[-\frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + y^2)\right].$$

i) Que vaut λ ? Trouver les lois marginales de X et de Y.
ii) Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien centré. Quelle est sa covariance ?

2.27. i) Montrer qu'il existe un triplet gaussien (X_1, X_2, X_3) tel que :

$$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \mathrm{E}(X_3) = 0,\ \mathrm{E}(X_1^2) = \mathrm{E}(X_2^2) = \mathrm{E}(X_3^2) = 1,$$

$$\mathrm{E}(X_1X_2) = \mathrm{E}(X_1X_3) = \mathrm{E}(X_2X_3) = 1/2.$$

ii) Quelle est la loi de $X_1 - X_2 + 2X_3$?
iii) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(X_1 + aX_2, X_1 - X_2)$ est un couple gaussien. Existe-t-il un a tel que $(X_1 + aX_2$ et $X_1 - X_2)$ soient indépendantes ?
iv) Calculer la fonction caractéristique et la densité de (X_1, X_2, X_3).

2.28. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien centré de covariance identité. Soit A une matrice orthogonale $n \times n$. Définisons $Y := AX$.
i) Quelle est la loi de $\|Y\|^2 := \sum_{j=1}^n Y_j^2$?
ii) On considère une décomposition en somme directe orthogonale de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n = \oplus_{j=1}^p E_j$, E_j orthogonal à E_k pour $j \neq k$. Soit Π_{E_j} la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur E_j et on note $X_{E_j} := \Pi_{E_j}(X)$. Montrer que les variables aléatoires $X_{E_j}, j = 1, \ldots, p$, sont indépendantes et que $\|X_{E_j}\|^2$ suit une loi de χ^2 à r_j degrés de liberté, avec $r_j := \mathrm{dim} E_j$.

2.29. Soit

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer qu'il existe un triplet gaussien (X, Y, Z), centré et de matrice de covariance K. Calculer la densité de ce triplet.
ii) Trouver la loi de $U := X + 2Y - Z$.
iii) Montrer que $Y^2/2 + Z^2/3 \sim \chi^2(2)$.
iv) Montrer que $(X + Y, Y - Z)$ est un couple gaussien. Calculer sa densité.

2.30. On considère la fonction :

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\, x^3 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

et on note par g la densité gaussienne centrée réduite. On définit la fonction :

$$f(x,y) := g(x)\, g(y) + h(x)\, h(y).$$

Prouver que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas gaussienne, mais que les densités marginales sont gaussiennes.