Licence de Mathématiques 2000-2001

Probabilités

3. Indépendance

3.1. Montrer les équivalences suivantes:
(i) pour A événement

$$\mathrm{P}(A) = 0 \text{ ou } = 1 \Leftrightarrow A, B \text{ indépendants pour tout } B \in \mathcal{A}$$

(ii) pour A, B événements

$$A, B \text{ indépendants } \Leftrightarrow A, B^c \text{ indépendants } \Leftrightarrow A^c, B \text{ indépendants } \Leftrightarrow A^c, B^c \text{ indépendants}$$

(iii) pour A, B, C événements

$$A,B,C \text{ indépendants} \Leftrightarrow A,B,C^c \text{ indépendants} \Leftrightarrow A,B^c,C^c \text{ indépendants}$$

$$\Leftrightarrow A^c,B^c,C^c \text{ indépendants}$$

Montrer que sous une de ces conditions A est indépendent de $B \cup C$, de $B \setminus C$.
(iv) On lance deux fois de suite un dé et on considère

$$A = \{ \text{ le premier résultat est un nombre pair } \},$$

$$B = \{ \text{ le deuxième résultat est un nombre pair } \}$$

et

$$C = \{ \text{ la somme des deux résultats est un nombre pair } \}.$$

Étudier l'indépendence de A, B, C.

3.2. On dispose de deux pièces de monnaie. La première a une probabilité $\frac{1}{4}$ de donner pile et la deuxième a une probabilité $\frac{1}{2}$ de donner pile. On choisit au hasard une pièce et on effectue une série de lancers avec la règle suivante: si au n-ème lancer la pièce donne pile (respectivement face) on effectue le lancer suivant avec la même pièce (respectivement avec l'autre pièce). On note α_n la probabilité de lancer la première pièce au n-ème jet. Montrer que α_n satisfait à une relation du type $\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b$. En déduire la valeur de α_n.

3.3. Étudier l'indépendance des coordonnées des couples aléatoires (X,Y) des exercices **1.32, 1.33, 1.34, 1.35, 2.4, 2.12, 2.13, 2.19, 2.21**.

3.4. Soit les variables aléatoires indépendantes X,Y. Calculer la loi de la somme $X + Y$ lorsque:
(i) $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$;
(ii) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$;
(iii) $X \sim \gamma(p,\lambda)$, $Y \sim \gamma(q,\lambda)$;
(iv) $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(n,\tau^2)$;
(v) Quelle est la loi de $X^2 + Y^2$ lorsque $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$?

3.5. Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{U}(1,2,\ldots,n)$.
(i) Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.

(ii) Trouver la loi de $X+Y$.
(iii) On pose $U=\min\{X,Y\}$ et $V=\max\{X,Y\}$. Trouver les lois de (U,V), U et V.
(iv) U et V sont-elles indépendantes?

3.6. Soit les variables aléatoires indépendantes X,Y de même loi $\mathcal{G}(p)$, $0<p<1$. On pose $U=\min\{X,Y\}$ et $V=\max\{X,Y\}-U$. Trouver les lois de U et V et étudier leur indépendance.

3.7. Deux personnes ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles: les instants X et Y de leur arrivées sont deux variables aléatoires indépendantes uniformément répartis dans $[14,15]$. Calculer la loi de la variable T durée d'attente du premier arrivé.

3.8. Soient X et Y variables aléatoires indépendantes et f et g deux fonctions boréliennes. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

3.9. Soit F une fonction de répartition de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(i) Si X a la fonction de répartition F, montrer que X admet une densité.
(ii) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi. Montrer que $\mathrm{P}(X=y)=0$ et que $\mathrm{P}(X<Y)=\frac{1}{2}$. Montrer que (X,Y) et (Y,X) ont la même loi.
(iii) Soit Z encore une variable aléatoire indépendante de (X,Y) et de même loi que X. Calculer $\mathrm{P}(X<Y<Z)$ et montrer que la valeur ne depend pas de F. Montrer que (X,Y,Z) et (Y,Z,X) ont la même loi.
(iv) Généraliser au cas de n variables aléatoires indépendantes de même loi.

3.10. Soient $X_1,\dots,X_n$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On note $U=\min_{1\leqslant j\leqslant n}X_j$ et $V=\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_j$.
(i) Calculer les fonction de répartition de U et V à l'aide de la fonction de répartition commune des X_j.
(ii) Si la loi commune des X_j admet une densité, montrer que U et V admettent des densités et les calculer.

3.11. Soient U et $X=(X_1,\dots,X_n)$ deux variables aléatoires indépendantes, U à valeurs dans $\{1,2,\dots,n\}$ et X ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On note $X_U(\omega)=X_{U(\omega)}(\omega)$. Montrer que X_U est une variable aléatoire ayant une densité. Étudier ensuite le cas où $U\sim\mathcal{U}(1,2,\dots,n)$ et les X_j sont indépendantes de même loi.

3.12. Une urne contient b boules blanches et r rouges; une boule étant tirée, on la remet et avec elle encore c boules de la couleur tirée. On pose $p=\frac{b}{b+r}$, $q=1-p$, $\gamma=\frac{c}{b+r}$. On note

$$X_n=\mathbb{1}_{\{\text{la } n\text{-ème boule tirée est blanche}\}}$$

et $S_n=X_1+\ldots+X_n$.
(i) Trouver les lois de X_1 et X_2 en fonction de p,q,γ.
(ii) Exprimer le coefficient de corrélation de X_1 et X_2 en fonction de p,q,γ.
(iii) Trouver la loi conditionnelle de X_n sachant $S_{n-1}=k$.
(iv) Exprimer la loi de X_n en fonction de p,q,γ et $\mathrm{E}(S_{n-1})$. En déduire la loi de X_n par récurrence.

3.13. Soit $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ indépendante de $Y \sim \mathcal{U}(0,1,\dots,n)$. Trouver la loi de $X+Y$ et calculer de deux façons l'espérance de $X+Y$.

3.14. Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.
(i) Trouver la loi de $X+Y$, son espérance et sa variance.
(ii) Soit Z une variable aléatoire de même loi que $X+Y$. Calculer la loi de $1-Y$ et déduire que $X-Y$ a la même loi que $Z-1$. Quelle est la densité de $X-Y$?
(iii) Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes?

3.15. Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes dont les densités sont

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbb{1}_{[0,1[}(x), f_Y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{]0,\infty[}.$$

Trouver la loi de XY.

3.16. **(i)** Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note $U = \cos\theta X - \sin\theta Y$ et $V = \sin\theta X + \cos\theta Y$. Trouver la loi de (U,V) et de ses marginales. U,V sont-elles indépendantes?
(ii) Soient R et Θ deux variables aléatoires indépendantes telles que $\Theta \sim \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$ et $R > 0$ avec $R^2 \sim \mathcal{E}(2)$. On note $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Trouver leurs lois et étudier leur indépendance.

3.17. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite et ε une autre variable aléatoire indépendante de X, prenant seulement les valeurs ± 1.
(i) Montrer que $Y := \varepsilon X$ est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite.
(ii) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
(iii) La variable aléatoire $X+Y$ est-elle gaussienne?

3.18. Montrer que le carré et le carré du module d'une fonction caractéristique sont aussi des fonctions caractéristiques.

3.19. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi. **(i)** Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes centrées réduites, alors $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
(ii) *Théorème de Bernstein.* Réciproquement, on suppose que X et Y sont de carré intégrable et que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. On veut montrer que X et Y sont deux variables gaussiennes. Pour cela :
(a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées, de variance 1.
(b) Montrer que φ, la fonction caractéristique commune de X et de Y, satisfait l'égalité $\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t)$. En déduire que φ ne s'annule nulle part.
(c) On pose $\psi(t) := \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$ et que $\psi(t) = 1 + o(t^2)$, lorsque $t \downarrow 0$. En déduire que, pour tout t, $\psi(t) = 1$ et que $\varphi(t) = \varphi(t/2)^4$. Conclure.

3.20. Un examen consiste en 20 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non; chaque réponse juste est notée 1 point et chaque réponse fausse, 0 points. Un étudiant répond entièrement au hasard et sa note finale est une variable aléatoire X.
(i) Soit X_j la note qu'il obtient à la j-ème question. Trouver la loi de X_j, son espérance, sa

variance.
(ii) Exprimer X en fonction des X_j, donner sa loi, son espérance et sa variance.
(iii) Calculer la probabilité d'avoir une note inférieure à 5. Donner un majorant de cette probabilité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.
(iv) Un étudiant sérieux estime qu'il donnera une réponse exacte à chaque question avec une probabilité de 0,8. Quelle est la loi de sa note, l'espérance et la variance. Donner une minoration pour la probabilité qu'il ait plus de 12.

3.21. Soit $(X_1,\dots,X_d)$ un vecteur aléatoire de loi

$$\mathrm{P}((X_1,\dots,X_d) = (x_1,\dots,x_d)) = \prod_{j=1}^{d} p_j^{x_j}(1-p_j)^{1-x_j},$$

où $p_1,\dots,p_d \in [0,1]$ et $x_1,\dots,x_d \in \{0,1\}$.
(i) Trouver les lois des X_j et étudier leur indépendance.
(ii) Soient $u_1,\dots u_d \in \mathbb{R}^d$ des vecteurs de norme au plus 1. On note $Y = \sum_{j=1}^{d} X_j u_j$ et $w = \sum_{j=1}^{d} p_j u_j$. Calculer $\mathrm{E}(\|Y-w\|^2)$ et montrer qu'on peut majorer cette quantité par $d/4$.
(iii) Endéduire qu'il existe une valeur de $(X_1,\dots,X_d)$ pour laquelle $\|Y-w\|^2 \leqslant d/4$.
(iv) Montrer que dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, toute combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\dots u_d$ de norme au plus 1, à coefficients dans $[0,1]$ peut-être approximée à $\sqrt{d}/2$ près par une combinaison linéaire à coefficients dans $\{0,1\}$.