Grandes déviations et applications : contrôle continu

vendredi 2 mars 2012 - durée 3 heures - documents de cours autorisés

Exercice I.

Soit $(E,\mathcal{B}(E))$ un espace métrique polonais muni de sa tribu borélienne. Considérons $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations avec une bonne fonctionnelle de taux I. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{\{F>M\}} e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon = -\infty.$$

On introduit la famille de mesures, définies par

$$Q_F^\varepsilon(A) := \frac{1}{Z_F^\varepsilon} \int_A e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon,\ \forall A \in \mathcal{B}(E),\ \varepsilon > 0,$$

où Z_F^ε sont des constantes.

1. Pour quel choix des constantes Z_F^ε les mesures Q_F^ε sont des probabilités ?
   On conservera ce choix tout au long de l'exercice.
   Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log Z_F^\varepsilon$.
2. Montrer que la famille de probabilités $\{Q_F^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle de taux
   $$I_F(x) := \sup_E (F - I) - (F(x) - I(x)),\ x \in E.$$
3. Prouver que I_F est une bonne fonctionnelle de taux. Considérer deux situations : F majorée ou non. Lorsque F n'est pas majorée, on pourra prendre une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ dans un ensemble de niveau de I_F et on pourra étudier les deux cas, $\sup_{n\geqslant 1} F(x_n) < \infty$ ou $= \infty$, en utilisant le fait que I est une bonne fonctionnelle de taux.
4. Soit $C \subset E$ un fermé et notons $I_F(C) := \inf_{x\in C} I_F(x)$.
   (a) Montrer que, pour ε suffisamment petit,
   $$Q_F^\varepsilon(C) \leqslant \exp\big(-\frac{I_F(C)}{\varepsilon}\big).$$
   (b) Vérifier que si C ne contient pas de minimum de I_F, alors $I_F(C) > 0$. On pourra introduire $C' := C \cap \{x \in E : I_F(x) \leqslant I_F(C) + 1\}$ et vérifier que $I_F(C') = I_F(C)$. Ensuite raisonner par l'absurde pour conclure.
5. On suppose que I_F admet un unique minimum x_0.
   (a) Montrer l'équivalence suivante
   $$\Big(Q_F^\varepsilon \Rightarrow \delta_{x_0},\ \text{ quand } \varepsilon \to 0\Big) \Leftrightarrow \Big(Q_F^\varepsilon(A) \to 0,\ \text{ quand } \varepsilon \to 0, \forall A \in \mathcal{B}(E) \text{ avec } x_0 \notin \overline{A}\Big).$$
   Pour un sens on pourra remarquer que $\delta_{x_0}(A^\circ) = \delta_{x_0}(\overline{A}) = 0$, si $x_0 \notin \overline{A}$. Pour l'autre sens on considère $O \ni x_0$ un ouvert et on écrit que, pour toute fonction $f \in C_b(E;\mathbb{R})$,
   $$\left| \int_E f dQ_F^\varepsilon - \int_E f d\delta_{x_0} \right| \leqslant \sup_{y\in O} |f(y) - f(x_0)| + 2\|f\|_\infty Q_F^\varepsilon(O^c).$$
   (b) Utiliser le résultat du point 4 pour déduire que $Q_F^\varepsilon \Rightarrow \delta_{x_0}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice II.

Considérons $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et notons $\overline{X}_n = (X_1+\ldots+X_n)/n$. Supposons que $X_1 \sim \mathcal{E}(a)$ et que $X_k \sim \mathcal{E}(b)$, pour tout $k \geqslant 2$, où $b > a > 0$.

1. Calculer la fonction log-Laplace $\tilde{\Lambda}$ et la transformée de Cramer $\tilde{\Lambda}^\star$ associées à la loi de X_2.
2. Calculer $\Lambda_n(\lambda) = \log \mathrm{E}[\exp(\lambda \overline{X}_n)]$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$ entier. Montrer ensuite que la limite $\Lambda(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(n\lambda)/n$ existe et la calculer explicitement.
3. Calculer la transformée de Legendre $\Lambda^\star$ de Λ. Tracer sur un même graphique $\Lambda^\star$ et $\tilde{\Lambda}^\star$.
4. Si $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé, majorer
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\big(\overline{X}_n \in F\big).$$
5. Notons $c := 1/(b-a)$. Justifier pourquoi les points de l'intervalle $]0, c[$ sont des points exposés. En déduire que pour tout point x de cet intervalle et pour tout $\delta > 0$ on a
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\big(|\overline{X}_n - x| < \delta\big) \geqslant -I(x),$$
où I est une fonction à déterminer.
6. Soit $x > c$ et soit $\delta_0 > 0$ tel que $x - \delta_0 > c$.
   (a) Montrer que, pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$,
   $$\sup_{0<\varepsilon<x-\delta-1/b} \big(-a\varepsilon - \tilde{\Lambda}^\star(x-\delta-\varepsilon)\big) = -\Lambda^\star(x-\delta).$$
   (b) Montrer que, pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$ et tout $\eta \in]0, x-\delta_0-c[$,
   $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\big(\overline{X}_n > x-\delta\big) \geqslant -\Lambda^\star(x-\delta-\eta).$$
   On pourra :
   – remarquer que pour tout $\varepsilon \in]0, x-\eta-\delta-1/b[$ et pour un n suffisamment grand,
   $$\big\{\overline{X}_n > x-\delta\big\} \supset \big\{\frac{X_1}{n} > \varepsilon\big\} \cap \big\{\frac{n-1}{n}\overline{Y}_n > x-\delta-\varepsilon\big\},$$
   avec $\overline{Y}_n$ à préciser ;
   – utiliser le théorème de Cramer et ses conséquences pour la suite de lois de $\overline{Y}_n$;
   – montrer que
   $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\big(\overline{X}_n > x-\delta\big) \geqslant -\tilde{\Lambda}^\star(x-\delta-\eta-\varepsilon) - a\varepsilon.$$
   (c) Justifier que, pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$, on a
   $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\big(\overline{X}_n > x-\delta\big) \geqslant -\Lambda^\star(x-\delta)$$
   et
   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\big(\overline{X}_n \geqslant x+\delta\big) \leqslant -\Lambda^\star(x+\delta).$$
   (d) Montrer que, pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$,
   $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\big(|\overline{X}_n - x| < \delta\big) \geqslant -\Lambda^\star(x-\delta).$$

Tournez la page S.V.P.

On pourra :
- déduire du point (c) précédent une minoration de $\mathrm{P}\big(\overline{X}_n > x-\delta\big)$ et une majoration de $\mathrm{P}\big(\overline{X}_n \geqslant x+\delta\big)$, pour n suffisamment grand ;
- choisir $\gamma > 0$ tel que $\Lambda^\star(x-\delta) < \Lambda^\star(x+\delta) + 3\gamma$;
- déduire que

$$\mathrm{P}\big(\overline{X}_n \geqslant x+\delta\big) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{P}\big(\overline{X}_n > x-\delta\big) \text{ et ensuite que } \mathrm{P}\big(|\overline{X}_n - x| < \delta\big) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{P}\big(\overline{X}_n > x-\delta\big).$$

7. Déduire que la suite des lois de $\overline{X}_n$ satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonctionnelle de taux à préciser.

Exercice III.

On note $E = \mathrm{C}_0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, satisfaisant $f(0) = 0$, muni de la norme sup. Soit $(w(t))_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

1. On note, pour $\varepsilon > 0$, $w_\varepsilon(t) := \sqrt{\varepsilon}w(t)$, $t \in [0,1]$. Rappeler le résultat du théorème de Schilder. Nous allons noter $I(B) := \inf_{f\in B} I(f)$, où $B \in \mathcal{B}(E)$ et I est la fonctionnelle de taux du théorème de Schilder.
2. Soit $g : [0,1] \to]0,\infty[$ une fonction continue et on note $G := \big\{f \in E : \exists t \in [0,1] \text{ tel que } f(t) \geqslant g(t)\big\}$.
   (a) Montrer que $G \subset E$ est un fermé ne contenant pas la fonction nulle et que $I(\mathring{G}) = I(G)$. On pourra vérifier que pour tout $\eta > 0$, $I(G) \leqslant I(\mathring{G}) \leqslant (1+\eta)^2 I(G)$.
   (b) Pour tout $u \in]0,1]$ on introduit la fonction $g_u(t) := \frac{g(u)}{u}(t \wedge u)$. Montrer que $g_u \in G$ et que $I(f) \geqslant I(g_{\tau_f})$ pour toute $f \in G$, où $\tau_f := \inf\{t \in [0,1] : f(t) = g(t)\}$.
   (c) Que vaut $I(G)$?
3. Déduire que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathrm{P}\big(\exists t \in [0,1] \text{ tel que } w_\varepsilon(t) \geqslant g(t)\big) = -\inf_{u\in]0,1]} \frac{g(u)^2}{2u}.$$

   S'il existe un unique u_0 réalisant l'infimum, expliquer pourquoi g_{u_0} est la trajectoire la plus probable au franchissement de la "barrière" g. Donner un exemple de fonction g qui pourrait illustrer cette situation.