Grandes déviations et applications : devoir maison no. 3

- à rendre pour le **16 février 2011** -

Dans la suite $(E, \mathcal{B}(E))$ désigne un espace de Banach séparable muni de sa tribu borélienne et $\{P^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ désigne une famille d'éléments de $\mathcal{M}_1(E)$.

Exercice I.

On suppose que la famille $\{P^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec bonne fonctionnelle de taux I et qu'elle satisfait $\sup\limits_{0<\varepsilon\leqslant 1} \left(\int e^{\frac{1}{\varepsilon}\langle \varphi, x\rangle}\, P^{\varepsilon}(dx) \right)^{\varepsilon} < \infty, \forall \varphi \in E^{\star}$. Montrer qu'il existe

$$\Lambda(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_E e^{\langle \frac{\varphi}{\varepsilon}, x\rangle} P^{\varepsilon}(dx) \in (-\infty, \infty], \quad \forall \varphi \in E^{\star},$$

et qu'elle satisfait $\Lambda(\varphi) = \sup\limits_{x\in E}\{\langle \varphi, x\rangle - I(x)\}$, $\varphi \in E^{\star}$.

Exercice II.

On suppose que la famille $\{P^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec fonctionnelle de taux I. Montrer que pour tout $x \in E$ on a :

$$\begin{aligned} I(x) &= \sup\{-\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^{(\varepsilon)}(A) \ : \ A \text{ ouvert convexe} \ni x\} \\ &= \sup\{-\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^{(\varepsilon)}(A) \ : \ A \text{ ouvert convexe} \ni x\}. \end{aligned}$$

Exercice III.

Sur l'espace $\mathcal{M}(E)$ on introduit la norme variation totale

$$\|\alpha\|_{\text{var}} := \sup\left\{\langle \phi, \alpha\rangle : \phi \in \mathcal{M}(E)^{\star} \text{ avec } \|\phi\|_{\mathcal{M}(E)^{\star}} \leqslant 1\right\}, \quad \alpha \in \mathcal{M}(E).$$

1. Soient $\nu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)$. Montrer que si $\nu \ll \mu$, alors $\|\nu - \mu\|_{\text{var}} = \|f - 1\|_{L^1(\mu)}$, où $f := \frac{d\nu}{d\mu}$.
2. Montrer que $3(x-1)^2 \leqslant (4+2x)(x\log x - x + 1)$, lorsque $x \geqslant 0$.
3. En déduire que, pour $\nu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)$, $\|\nu - \mu\|_{\text{var}}^2 \leqslant 2H(\nu|\mu)$.