Grandes déviations et applications : devoir maison no. 2

- à rendre pour le **7 février 2011** -

Dans les exercices suivants μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ et Λ et $\Lambda^\star$ désignent respectivement les transformées de log-Laplace et de Cramer associées à μ.

Exercice I.

Montrer que

a) si $\mu = e^{-1}\sum_{n\geqslant 0}(n!)^{-1}\delta_n$, alors $\Lambda^\star(x) = \begin{cases} 1 - x + x\log x & x \geqslant 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$.

b) si $\mu(dx) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)e^{-x}dx$, alors $\Lambda^\star(x) = \begin{cases} x - 1 - \log x & x > 0 \\ \infty & x \leqslant 0 \end{cases}$.

Exercice II.

Soit $\alpha \in (0,1)$ et on suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x|\mu(dx) < \infty$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant \frac{2}{1-\alpha}.$$

On pourra montrer que si $y \geqslant m := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)$ et $\Lambda^\star(y) < \infty$, alors $\int_{[m,y]} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$ et que si $y \leqslant m$ et $\Lambda^\star(y) < \infty$, alors $\int_{[y,m]} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$.

Exercice III.

On suppose que $\Lambda(\lambda) < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et notons $m = \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)$. Soit P_n la loi de l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + \ldots + x_n)/n$ sous $\mu^{\otimes n}$. Montrer que, lorsque $z \geqslant m$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}_n((z,\infty)) = -\inf_{y>z} \Lambda^\star(y).$$

On pourra écrire que, pour tout $\delta > 0$, $[z-\delta,\infty) \subset (z,\infty) \subset [z,\infty)$.

Exercice IV.

Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ. Supposons que $\Lambda(\lambda) < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = 0$, $\int_{\mathbb{R}} x^2\mu(dx) = 1$. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{2n\log\log n}} \leqslant 1, \text{ p.s.}$$

On pourra utiliser le résultat du théorème de Cramer pour étudier pour un $z > 1$ arbitraire $\mathrm{P}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{2n\log\log n}} > z\right)$.