Grandes déviations et applications : devoir maison no. 1

- à rendre pour le **28 janvier 2011** -

On désigne par $(E, \mathcal{B}(E))$ un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

Exercice I.

Soit $I : E \to [0, \infty]$ une bonne fonctionnelle de taux et considérons $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations sur E avec fonctionnelle de taux I. Montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $I(x) = 0$.

Exercice II.

Supposons que $I : E \to [0, \infty]$ est une fonctionnelle de taux et que $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations sur E avec taux I. On suppose de plus que E est localement compact (*i.e.* tout point possède un voisinage compact). Démontrer que I est une bonne fonctionnelle de taux si et seulement si $\{P^\varepsilon\}$ est exponentiellement tendue.

Exercice III.

Soit $\{P_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations sur E avec une bonne fonctionnelle de taux $I : E \to [0, \infty]$. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \left(\int e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} F} \, dP^\varepsilon \right)^\varepsilon < \infty.$$

Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int e^{\frac{1}{\varepsilon} F} \, dP^\varepsilon = \sup_E (F - I).$$

Exercice IV.

Soit $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations sur E avec une bonne fonctionnelle de taux $I : E \to [0, \infty]$. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant la condition suivante

$$\lim_{\ell\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{\{F>\ell\}} e^{\frac{1}{\varepsilon} F} \, dP^\varepsilon = -\infty.$$

Montrer que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_C e^{\frac{1}{\varepsilon} F} \, dP^\varepsilon \leqslant \sup_C (F - I), \qquad \text{pour } C \subset E \text{ fermé}$$

et

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_O e^{\frac{1}{\varepsilon} F} \, dP^\varepsilon \geqslant \sup_O (F - I), \qquad \text{pour } O \subset E \text{ ouvert.}$$

Que vaut $\lim_{\ell\to\infty} \inf\{I(x) - f(x) : x \in E \text{ tel que } f(x) > \ell\}$?