

## FEUILLE D'EXERCICES # 2 : MARTINGALES

### Exercice 1 *Martingale et fonction caractéristique*

Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note  $\varphi(u) := \mathbb{E}[\exp(iuZ_1)]$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , la fonction caractéristique de la loi commune et on pose  $S_0 = 0$  et  $S_n = \sum_{j=1}^n Z_j$ ,  $n \geq 1$ . Montrer que pour  $u$  tel que  $\varphi(u) \neq 0$ ,  $M_n(u) = \exp(iuS_n)/\varphi(u)^n$ ,  $n \geq 0$  est une martingale (complexe).

### Exercice 2 *Martingale multiplicative I*

Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes intégrables telles que  $\mathbb{E}(Y_n) = m_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ . Montrer que  $M_n = \prod_{j=1}^n (Y_j/m_j)$ ,  $n \geq 1$ ,  $M_0 = 1$ , est une martingale.

### Exercice 3 *Martingale multiplicative II*

Soient  $Y_1, Y_2, \dots$  des variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées et la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $X_0 = 1$  et  $X_n := \prod_{j=1}^n Y_j$  pour  $n \geq 1$ .

1. Sous quelles conditions la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle une surmartingale ? Une sous-martingale ? Une martingale ?
2. On se place dans le dernier cas et on suppose de plus que  $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$  et qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $Y_n \geq \delta$ . Montrer qu'alors  $\mathbb{E}[\log Y_1] < 0$ . Utiliser la loi des grands nombres pour  $(\log X_n)/n$  pour montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = 0$  presque sûrement.

### Exercice 4 *Urne de Pólya I*

On dispose (d'une infinité) de boules bleues et vertes. À l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne uniformément au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule du même couleur. Soit  $S_n$  le nombre de boules bleues au temps  $n$ , et  $X_n := S_n/(n+2)$  la proportion de boules bleues au temps  $n$ .

1. Montrer que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale par rapport à sa filtration naturelle (canonique)  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et calculer  $\mathbb{E}[X_n]$ .
2. Si au lieu d'ajouter une seule boule on ajoute  $c \in \mathbb{N}^*$  boules de la même couleur que la boule extraite est-ce que la proportion de boules bleues reste une martingale ?

### Exercice 5 *Martingale et loi géométrique*

Soit  $\xi$  une variable aléatoire géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Soit, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_n$  la tribu engendrée par  $\xi \wedge (n+1)$ .

1. Montrer que :

$$\mathcal{F}_n = \sigma \{ \{ \xi = 0 \}, \{ \xi = 1 \}, \dots, \{ \xi = n \}, \{ \xi \geq n+1 \} \}.$$

2. Montrer que :

$$X_n := \mathbb{1}_{\{ \xi \leq n \}} - p(\xi \wedge n), \quad n \geq 0.$$

est une martingale.

**Exercice 6** *Martingale et suite récurrente I*

Soient  $a \in [0, \pi/2]$  et  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose  $X_0 := a$  et on définit par récurrence  $X_{n+1} := U_{n+1} \sin(X_n)$  pour  $n \geq 0$ . On note  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  la filtration naturelle associée à la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  prend des valeurs positives, puis que la suite  $(2^n X_n)_{n \geq 0}$  est une surmartingale relativement à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 7** *Transformée de Lévy discrète*

Soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables indépendantes et de même loi  $\mathbb{P}(Z_1 = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = -1) = 1/2$ . On pose  $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$  et  $S_0 := 0$ ,  $S_n := Z_1 + \dots + Z_n$  pour  $n \geq 1$ . On considère la suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  définie par  $M_0 := 0$  et pour  $n \geq 1$  :

$$M_n := \sum_{k=1}^n \text{sign}(S_{k-1}) Z_k.$$

1. Quel est le compensateur de la sousmartingale  $(S_n^2)_{n \geq 0}$  ?
2. Montrer que  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale et calculer le compensateur de  $(M_n^2)_{n \geq 0}$ .
3. Quelle est la décompositin de Doob de  $(|S_n|)_{n \geq 0}$  ?
4. En déduire que  $M_n$  est mesurable par rapport à la tribu  $\sigma(|S_1|, \dots, |S_n|)$

**Exercice 8** *La prochaine est rouge*

On prend un jeu de 52 cartes, dont on retourne les cartes une à une. Le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire “la prochaine est rouge” ; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd.

On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. Pour  $n = 0, \dots, 51$ , on note  $R_n$  le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné  $n$  cartes. Soit  $A_n$  l'évènement “la  $n$ -ième carte retournée est rouge”.

1. Calculer  $\mathbb{P}(A_{n+1} | R_n = j)$ , pour  $j \in \{2, \dots, 26\}$  et  $n \in \{0, \dots, 50\}$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(R_{n+1} = j | R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ , pour  $n \in \{0, \dots, 50\}$  et  $j \in \{0, \dots, 26\}$ , où on a posé  $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$ .
3. Montrer que, pour  $n \in \{0, \dots, 50\}$ ,

$$\mathbb{E}(R_{n+1} | \mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}.$$

4. Montrer que  $X_n := R_n / (52 - n)$ ,  $n = 0, \dots, 51$ , est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)$  et que  $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ .
5. On définit  $\tau \in \{0, \dots, 51\}$  le temps où le joueur dit “la prochaine est rouge” avant de retourner la  $(n + 1)$ -ième carte. Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est  $\mathbb{E}(X_\tau)$ . Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité  $p$  de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer  $p$ .

**Exercice 9** *Martingale identiquement distribuée*

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-martingale telle que les variables  $X_n$  ont toutes même loi.

1. Montrer que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est en fait une martingale, ainsi que  $(X_n \vee a)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(X_n \wedge a)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $a$  est un réel fixé.
2. Soient  $n > m$  deux entiers et  $a$  un réel. Montrer que sur l'ensemble  $\{\omega, X_m(\omega) \geq a\}$ , on a  $X_n \geq a$  presque sûrement. En déduire que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante presque sûrement.

**Exercice 10** Une réciproque du théorème d'arrêt

1. Soit  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  une filtration,  $T$  un temps d'arrêt et  $A \in \mathcal{F}_T$ . On pose  $T_A := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ \infty & \text{sur } A^c. \end{cases}$

Montrer que  $T_A$  est un temps d'arrêt.

Si  $S$  est un autre temps d'arrêt tel que  $T \leq S$ , on pose  $U := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ S & \text{sur } A^c. \end{cases}$

Montrer que  $U$  est un temps d'arrêt.

2. Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une suite adaptée de variables aléatoires intégrables. Montrer que  $M$  est une martingale si et seulement si  $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$ , pour tout temps d'arrêt borné  $\tau$ .

On pourra considérer des temps d'arrêt  $U$  avec  $T \equiv n$ ,  $A \in \mathcal{F}_n$  et  $S \equiv n + 1$ .

**Exercice 11** Un critère de finitude pour les temps d'arrêt

Soit  $T$  un temps d'arrêt pour une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . On suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et  $N \geq 1$  un entier tels que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\mathbb{P}(T \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon$ , p.s. Montrer que  $T$  est fini presque sûrement et que  $\mathbb{E}[T] < +\infty$ .

**Exercice 12** Autre version du théorème d'arrêt

Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une martingale définie sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$  et  $T$  un temps d'arrêt vérifiant  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ ,  $\mathbb{E}(|X_T|) < +\infty$  et  $\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{T > n}) \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

1. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_T| \mathbb{1}_{T > n}) = 0$ .
2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_{T \wedge n} - X_T|) = 0$ .
3. En déduire que  $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ .

**Exercice 13** Ruine du joueur et identité de Wald

Soient  $a$  et  $b$  des entiers strictement positifs et  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi  $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1}$  où  $0 < p, q < 1$  et  $p + q = 1$ . On pose  $S_0 := 0$  et  $S_n := Z_1 + \dots + Z_n$  pour  $n \geq 1$  et on désigne par  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  la filtration naturelle associée. On suppose dans un premier temps que  $p \neq q$ .

1. Montrer que les suites  $W_n := S_n - (2p - 1)n$  et  $M_n = (q/p)^{S_n}$  issues de 0 et 1 respectivement sont des martingales par rapport  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ .
2. Soit  $T = \inf\{n \geq 0, S_n \notin ]-a, b[ \}$ . Montrer que  $T$  est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
3. En déduire les valeurs de  $\mathbb{P}(S_T = -a)$ ,  $\mathbb{P}(S_T = b)$  et  $\mathbb{E}(T)$ .

On suppose maintenant que  $p = q = 1/2$ , de sorte la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une martingale.

4. Montrer que le temps  $T$  est toujours fini presque sûrement.
5. Montrer que  $\mathbb{E}(S_T) = 0$  et en déduire les expressions de  $\mathbb{P}(S_T = -a)$  et  $\mathbb{P}(S_T = b)$ .

On cherche enfin à expliciter  $\mathbb{E}[T]$  dans le cas symétrique. Soit  $\ell$  la transformée de Laplace de  $\mu$  i.e.  $\ell(\lambda) = \cosh(\lambda) = pe^\lambda + qe^{-\lambda}$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

6. Pour  $n \geq 0$ , on pose  $Y_n := e^{\lambda S_n} / \ell(\lambda)^n$ . Montrer que  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est une martingale.
7. Montrer que  $\mathbb{E}(e^{\lambda S_T} / \ell(\lambda)^T) = 1$ .
8. Retrouver le fait que  $\mathbb{E}(S_T) = 0$  à partir de la dernière égalité.
9. Pour  $\alpha > 1$ , calculer  $\mathbb{E}[\alpha^{-T} \mathbb{1}_{S_T = -a}]$  et  $\mathbb{E}[\alpha^{-T} \mathbb{1}_{S_T = b}]$ . En déduire  $\mathbb{E}(T | S_T)$  et  $\mathbb{E}[T]$ .

**Exercice 14** *Un nouvel temps d'arrêt à partir d'un temps d'arrêt*

Soit  $T$  un temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\phi(n) := \inf\{k \geq 0 : \{T = n\} \in \mathcal{F}_k\}.$$

Prouver que  $\phi(T)$  est un temps d'arrêt, majoré par  $T$ .

**Exercice 15** *Une martingale qui converge en probabilité mais pas presque sûrement*

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables indépendantes vérifiant  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2n$  et  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$ . On note  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  la filtration naturelle associée. On définit une nouvelle suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \geq 1}$  en posant  $Y_1 := X_1$ , et pour  $n \geq 2$  :

$$Y_n := \begin{cases} X_n & \text{si } Y_{n-1} = 0, \\ n|X_n|Y_{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une martingale pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ .
2. Montrer que  $(Y_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que  $(Y_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas presque sûrement. Quelle hypothèse fait défaut pour l'application du théorème de convergence presque sûre ?

**Exercice 16** *Martingale et suite récurrente II*

Soient  $a$  un réel et  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose  $X_0 := a$  et on définit par récurrence  $X_{n+1} := U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2$  pour  $n \geq 0$ . On note  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  la filtration naturelle associée à la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$ .

1. Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale relativement à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .
2. On suppose maintenant que  $a \in [0, 1]$ . Montrer que lorsque  $n$  tend vers l'infini, la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement vers une variable  $X_\infty$  que l'on précisera.

**Exercice 17** *Un exemple de martingale qui converge p.s. vers  $+\infty$*

Soit  $(X_n)_{n \geq 2}$  une suite de variables indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose  $S_n := X_2 + \dots + X_n$  pour  $n \geq 2$ . Montrer que  $(S_n)_{n \geq 2}$  est une martingale relativement à la filtration engendrée par les  $(X_n)_{n \geq 2}$  et qu'elle converge p.s. vers  $+\infty$ .

**Exercice 18** *Un exemple de martingale non bornée dans  $\mathbb{L}^1$*

Soit  $(Z_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(Z_1 = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = -1) = 1/2$ . On pose  $S_n := Z_1 + \dots + Z_n$  pour  $n \geq 1$  et  $S_0 = 0$ . Montrer que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale relativement à la filtration engendrée par les  $(Z_i)_{i \geq 1}$  et qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $n$  assez grand, on ait  $\mathbb{E}[|S_n|] \geq c\sqrt{n}$ .

**Exercice 19** *Un exemple de martingale qui converge p.s. mais qui n'est pas bornée dans  $\mathbb{L}^1$*

Soit  $(Z_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables i.i.d. telles que  $\mathbb{P}(Z_1 = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = -1) = 1/2$ . Soit  $T$  une variable indépendante des  $(Z_i)_{i \geq 1}$  telle que  $\mathbb{P}(T = n) = C/n^\alpha$  pour  $n \geq 1$  avec  $\alpha > 1$  et  $C = (\sum_{n \geq 1} n^{-\alpha})^{-1}$ . On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n \wedge T} Z_k, \quad n \geq 1.$$

Montrer que  $S_n$  est une martingale relativement à la filtration  $\mathcal{F}_n := \sigma(T, Z_1, \dots, Z_n)$ ,  $n \geq 1$ , qu'elle converge p.s., mais que pour  $\alpha$  bien choisi, elle n'est pas bornée dans  $\mathbb{L}^1$ .

Pour ce dernier point, on pourra se servir de l'exercice précédent.

**Exercice 20** *Loi du zéro un de Kolmogorov via les martingales*

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit :

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad \mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n\right), \quad \mathcal{F}^n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots), \quad \mathcal{F}^\infty := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}^n.$$

Soit  $A$  un évènement asymptotique, i.e.  $A \in \mathcal{F}^\infty$ . En utilisant la martingale fermée  $(M_n)_{n \geq 1}$  définie par  $M_n := \mathbb{E}[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n]$ , montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**Exercice 21** *Théorème de Rademacher sur les fonctions lipschitziennes*

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité,  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz  $L > 0$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $X_n := 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor$  et  $Z_n := 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n))$ .

1. Pour  $n \geq 1$ , montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n), \quad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer  $\mathbb{E}[h(X_{n+1}) | X_n]$  pour toute fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable continue. En déduire que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est une martingale bornée relativement à  $(\mathcal{F}_n)$ .
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire  $Z$ , limite p.s. et dans  $\mathbb{L}^1$  de  $(Z_n)_{n \geq 0}$ , puis qu'il existe une fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne bornée telle que  $Z = g(X)$ .
4. Calculer  $\mathbb{E}[h(X) | X_n]$  pour toute fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée. En déduire que

$$\text{presque sûrement : } Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

5. Conclure que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) du$ .

**Exercice 22** : *Urne de Pólya II*

On considère une urne dans laquelle se trouvent initialement deux boules, une bleue et une verte. On dispose par ailleurs d'un stock infini de boules bleues et vertes. Partant de la configuration initiale, à chaque pas de temps, on tire au hasard une boule de l'urne et on la remet dans l'urne avec une boule de même couleur issue du stock. À l'instant  $n$ , il y a ainsi  $n + 2$  boules dans l'urne. On note  $S_n$  le nombre de boules bleues dans l'urne à l'instant  $n$  et  $X_n := S_n / (n + 2)$  la proportion de boules bleues.

1. Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale bornée. En déduire  $X_n$  converge (en quel sens?) vers une variable  $X_\infty$  telle que  $0 \leq X_\infty \leq 1$ .
2. Pour  $k \geq 1$ , on considère la nouvelle suite  $(Z_n^{(k)})_{n \geq 0}$  de variables aléatoires :

$$Z_n^{(k)} := \frac{S_n(1 + S_n) \dots (k - 1 + S_n)}{(1 + n) \dots (k + n)}.$$

Montrer que  $(Z_n^{(k)})_{n \geq 0}$  est également une martingale bornée qui converge (en quel sens?) vers  $Z_\infty^{(k)} = X_\infty^k$  (la puissance  $k$ -ième de  $X_\infty$ ) et que  $\mathbb{E}[Z_\infty^{(k)}] = 1 / (k + 1)$ .

3. En déduire que la loi de  $Z_\infty$  est la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 23** *Sur les arbres de Galton-Watson*

Soit  $P = \sum_{n \geq 0} p_n \delta_n$  une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}$  et  $(X_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 1}$  une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi  $P$ . On définit par récurrence une suite  $(Z_n)_{n \geq 0}$  telle que  $Z_0 := 1$  et pour  $n \geq 0$  :

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

La suite  $Z_n$  représente le nombre d'individus à la génération  $n$  d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $P$ . On adopte ici la convention  $\sum_{\emptyset} = 0$  de sorte que si  $Z_n = 0$  alors  $Z_{n+1} = 0$ . On désigne par  $T := \inf\{n \geq 0, Z_n = 0\} \in \bar{\mathbb{N}}$  le temps d'extinction de l'arbre.

1. Établir les points suivants :

- (a) Si  $p_k = 1$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ , i.e.  $P = \delta_k$ , alors  $Z_{n+1} = kZ_n = \dots = k^{n+1}Z_0$ .
- (b) Si  $p_0 = 0$  et  $p_1 < 1$  alors  $\mathbb{P}(Z_n \uparrow \infty) = 1$ . Autrement dit, la taille de l'arbre tend vers l'infini avec  $n$  (comparer au jeu de pile ou face).
- (c) Si  $p_0 + p_1 = 1$  alors  $\mathbb{P}(Z_n \downarrow 0) = 1$ . Autrement dit, l'arbre s'éteint presque sûrement et la loi du temps d'extinction  $T$  est géométrique.

Dans toute la suite, nous supposons que :

$$Z_0 = 1, \quad 0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1, \quad p_k < 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On note  $m := \mathbb{E}[Z_1]$  lorsque cette moyenne existe, et  $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 \in \bar{\mathbb{R}}_+$ .

2. Montrer que si  $m < +\infty$ , alors  $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$  pour tout  $n \geq 0$  et si  $\sigma^2 < \infty$  alors

$$\text{var}(Z_n) = m^n \sigma^2 \frac{m^n - 1}{m^2 - m}, \quad \text{prolongé en } n\sigma^2 \text{ si } m = 1.$$

Le cas  $m = 1$  est dit critique, les cas  $m < 1$  et  $m > 1$  sont respectivement dits sous-critique et sur-critique.

- 3. Montrer que la probabilité d'extinction vérifie  $\mathbb{P}(T < +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0)$ .
- 4. Soit  $g$  la fonction génératrice de  $X_{1,1} = Z_1$ , i.e.  $g(s) := \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \sum_{m \geq 0} p^m s^m$ , et soit  $g_n$  la fonction génératrice de  $Z_n$ , i.e.  $g_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$ . Montrer que l'on a la relation

$$g_n = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}}.$$

- 5. Remarquer que  $\mathbb{P}(Z_n = 0) = g_n(0)$  et en déduire d'une part que, si  $m \leq 1$  alors l'extinction est presque sûre i.e.  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ , et d'autre part que si  $m > 1$  alors  $\mathbb{P}(T < +\infty)$  est l'unique racine dans  $]0, 1[$  de l'équation de point fixe  $g(s) = s$ . Expliciter cette probabilité lorsque la loi de reproduction est une loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .
- 6. Montrer que la suite  $Y_n := Z_n/m^n$  est une martingale. En déduire que le comportement asymptotique de  $Z_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- 7. On cherche maintenant à préciser ce comportement asymptotique dans les cas critique et sur-critique. On suppose tout d'abord que  $m = 1$  et  $\sigma < +\infty$ . En faisant un développement de Taylor de la fonction  $g$  à l'ordre 2 en zéro, montrer que

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathbb{P}(Z_n > 0) = 2/\sigma^2$  ;
- (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[Z_n/n | Z_n > 0] = \sigma^2/2$  ;

(c)  $\mathcal{L}(Z_n/n | Z_n > 0)$  tend lorsque  $n$  tend vers l'infini vers la loi exponentielle  $\mathcal{E}(2/\sigma^2)$ .

8. On suppose maintenant que  $m > 1$  et  $\sigma < +\infty$ . Montrer que la martingale  $(Y_n)$  converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^2$  vers une variable positive  $Y_\infty$  qui vérifie :

(a)  $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$  et  $\text{var}(Y_\infty) = \sigma^2/(m^2 - m)$ ;

(b)  $\phi'_\infty(0) = -1$ , et  $\phi_\infty(ms) = g(\phi_\infty(s))$ , où l'on a posé  $\phi_\infty(s) := \mathbb{E}[e^{-sY_\infty}]$ .

**Exercice 24** *Modèle de Wright-Fisher*

Soient  $k$  et  $N$  deux entiers tels que  $0 < k < N$ . On définit par récurrence une suite de variables  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  de la façon suivante :  $X_0^N := k$  et pour tout  $n \geq 0$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$ , la loi de  $X_{n+1}^N$  sachant que  $X_n^N = i$  est la loi binomiale  $\mathcal{B}(N, i/N)$ .

1. Montrer que la suite  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  est une martingale.

2. Montrer que lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^p$  pour tout  $p \geq 1$ .

3. Décrire la loi de la variable limite  $X_\infty^N$ .

**Exercice 25** : *Concentration sur 0 et 1*

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires réelles. On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ ,  $n \geq 0$ . On suppose que  $X_0 = a$  presque sûrement avec  $a \in [0, 1]$  et que pour  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \text{ ou } X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2}\right) = 1.$$

En déduire que presque sûrement, pour tout  $n \geq 0$ ,  $X_n \in [0, 1]$ .

2. Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale qui converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^p$  pour tout  $p \geq 1$  vers une variable aléatoire que l'on note  $X_\infty$ .

3. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

4. En déduire la valeur de  $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$  puis la loi de  $X_\infty$ .

**Exercice 26** : *Ruine et grande fortune*

Soit  $(S_n)_{n \geq 0}$  une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$  :  $S_0 := 0$ ,  $S_n := Z_1 + \dots + Z_n$  pour  $n \geq 1$ , où les variables  $Z_i$  sont indépendantes et de même loi  $0 < \mathbb{P}(Z_1 = 1) = p < 1$ ,  $\mathbb{P}(Z_1 = -1) = q = 1 - p$ .

1. Pour  $n \geq 0$ , on pose  $X_n := (q/p)^{S_n}$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale positive.

2. Montrer que pour  $k > 0$ ,

$$\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} S_n \geq k) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k,$$

et que lorsque  $q > p$  :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n \geq 0} S_n\right] \leq \frac{q}{q - p}.$$