Feuille d'exercices # 3 : Chaînes de Markov

Exercice 1 *Sous-suites de chaînes de Markov*

1. Soient U, V, W trois variables aléatoires à valeurs dans E ensemble dénombrable. On suppose que pour tout $u \in \mathbb{N}$ la fonction $(v, w) \mapsto \mathbb{P}(U = u | V = v, W = w)$ est bien définie et ne dépend pas de w. Montrer que
$$\mathbb{P}(U = u | V = v, W = w) = \mathbb{P}(U = u | V = v).$$
2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov (ν, P) à valeurs dans E un ensemble dénombrable. Étudier si les suites sont des chaînes de Markov et préciser le cas échéant leurs matrices de transition :
   (a) $Y_m = X_{n_m}$, où $(n_m)_{m \geq 0} \subset \mathbb{N}$ est une sous-suite croissante non-bornée ;
   (b) $Z_n = X_{k+n}$, où $k \geq 1$ entier ;
   (c) $W_n = X_{kn}$ où $k \geq 2$ entier.
3. Même question pour la suite $V_n = (X_n, X_{n+1})$.

Exercice 2 *Propriété de Markov forte*
Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov (ν, P) à valeurs dans E et soit T un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$, tel que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Montrer que la suite $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ est encore une chaîne de Markov $(\tilde{\nu}, P)$, où
$$\tilde{\nu}(x) = \mathbb{P}_\nu(X_T = x) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_\nu(X_k = x, T = k).$$
On pourra procéder comme suit :

a) Soit $\iota : E^{n+1} \to \{0, 1\}$ une fonction mesurable. Montrer que la loi conditionnelle de $X_n, X_{n+1}, \ldots$ sachant $\{\iota(X_0, \ldots, X_n) = 1\} \cap \{X_n = x\}$ est la même que la loi conditionnelle de $X_n, X_{n+1}, \ldots$ sachant $\{X_n = x\}$.

b) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in E$ et toute suite d'états $(x_m) \subset E$ on a
$$\text{(p.M.f)} \quad \mathbb{P}(X_{T+k} = y | X_m = x_m \text{ pour } 0 \leq m < T, X_T = x) = \mathbb{P}(X_{T+k} = y | X_T = x).$$

Exercice 3 *Fonction mesurable d'une chaîne de Markov*
Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov (ν, P) à valeurs dans E un ensemble au plus dénombrable. On considère $f : E \to F$ une fonction mesurable, où F est un ensemble au plus dénombrable, et on note $Y_n = f(X_n)$.

1. Montrer que si f est une bijection entre E et F alors (Y_n) est une chaîne de Markov.
2. On suppose que (X_n) est une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ avec loi initiale $\nu = (1/3, 1/3, 1/3)$ et de matrice de transition
$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Soit $f : E \to F = \{1, 2\}$ donnée par $f(1) = f(2) = 1$ et $f(3) = 2$. Montrer que (Y_n) n'est pas une chaîne de Markov.

3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ de matrice de transition
$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$
Soit $f : E \to F = \{1,2\}$ donnée par $f(1) = f(2) = 1$ et $f(3) = 2$. Montrer que si $\alpha = \beta$ alors (Y_n) est une chaîne de Markov.
4. On suppose que f est surjective de E dans F telle que
$$\forall y \in F, \forall x, x' \in E\, f(x) = f(x') \Rightarrow \mathbb{P}_x(f(X_1) = y) = \mathbb{P}_{x'}(f(X_1) = y).$$
Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov.
5. Si f est une bijection entre E et F la suite $Z_n = (X_n, f(X_n))$ est-elle une chaîne de Markov ?

Exercice 4 *Être ou ne pas être markovien*
Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant les valeurs ± 1 avec probabilités $1/2$. Les suites suivantes sont-elles des chaînes de Markov ?

1. $S_0 = 0$, $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ quand $n \geq 1$;
2. $M_n = \max\{S_k : 0 \leq k \leq n\}$, $n \geq 0$;
3. $Y_n = M_n - S_n$, $n \geq 0$;
4. $V_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$.

Utiliser vos conclusions pour répondre à la question suivante : si (X_n) et (X'_n) sont deux chaînes de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$, est-ce que la suite somme $(X_n + X'_n)$ est nécessairement une chaîne de Markov ?

Exercice 5 *Ruine du joueur I*
Un joueur partant d'un capital initial de j euros fait une série de paris à 1 euro. On suppose que les paris sont indépendants, la probabilité de gagner est $p \in]0,1[$. Si au cours des paris, le capital du joueur atteint 0, il est ruiné et ne peut plus jouer : son capital reste nul après. On désigne par X_n le capital du joueur à l'instant n.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$, préciser sa matrice de transition.
2. Supposons maintenant que si son capital atteint un seuil $N \in \mathbb{N}^*$, le joueur s'arrête de jouer. écrire la nouvelle matrice de transition.

Exercice 6 *La chaîne à deux états*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,1\}$ et de probabilité de transition :
$$P := \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

1. Montrer que pour $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$:
$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$
Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta = 0$? On supposera pour la suite de l'exercice que $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

2. Vérifier (par récurrence) que, pour toute loi initiale ν :

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = 0) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^n \left(\nu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

3. Si $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$, montrer que $\{X_n : n \geq 0\}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathtt{m}$. Que vaut $\mathtt{m}$? On supposera pour la suite de l'exercice que $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$.
4. (*Mesure stationnaire*) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\mathtt{m}}(X_n \in A) = \mathtt{m}(A)$.
   Écrire cette propriété à l'aide de la matrice P.
5. Calculer $\mathrm{Cov}_{\mathtt{m}}(X_n, X_{n+1}) := \mathbb{E}_{\mathtt{m}}(X_n X_{n+1}) - \mathbb{E}_{\mathtt{m}}(X_n)\mathbb{E}_{\mathtt{m}}(X_{n+1})$.
   Les variables aléatoires $\{X_n : n \geq 0\}$ sont-elles indépendantes ?
6. Calculer le potentiel de la chaîne. Classifier les états de la chaîne.
7. On note $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que $\mathbb{E}_{\mathtt{m}}(S_n) = \dfrac{n\alpha}{\alpha+\beta}$ et que $\mathrm{Var}_{\mathtt{m}}(S_n) \leq C\, n$, où C est une constante.
8. (*Loi faible des grands nombres*)
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ en probabilité sous $\mathbb{P}_{\mathtt{m}}$, sous $\mathbb{P}_0$ et sous $\mathbb{P}_1$.

Exercice 7 *Bruit qui court*
Un message pouvant prendre deux formes (oui et non) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme avec probabilité $1-p$. Les intermédiaires sont indépendants.

1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov homogène à deux états.
2. Calculer la probabilité que l'information transmise par le $n-$ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale.
3. Est-ce que la réponse dépend du choix de la loi initiale ? Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 8 *Quand les vaches ne regardent pas les trains*
Sur une route, en moyenne, trois camions sur quatre sont suivis par une voiture, tandis que seule une voiture sur cinq est suivie par un camion. Déterminer les proportions de voitures et de camions sur cette route.

Exercice 9 *Un autre exemple de chaîne météo*
Soit $E = \{1,2,3\}$ et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur E de loi initiale $\nu = (1/2, 1/3, 1/6)$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & a \\ 1/5 & b & 1/2 \\ c & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer a, b et c, et calculer la loi de X_2.
2. Déterminer la limite de P^n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 10 *Urne d'Ehrenfest*
Le modèle de diffusion d'Ehrenfest est le suivant : des balles numérotées de 1 à d sont réparties dans 2 urnes, A et B. À chaque instant n, on tire uniformément au hasard un nombre i entre 1 et d et on change d'urne la balle numéro i. On désigne par X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants. La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Préciser l'ensemble de ses valeurs et sa matrice de transition.

Exercice 11 *Chaînes de Markov et martingales*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E au plus dénombrable de loi initiale ν et de matrice de transition P. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ est dite *harmonique* (ou *invariante*) si

$$\sum_{y\in E} p(x,y)|f(y)| < \infty \text{ et } P(x,f) := \sum_{y\in E} p(x,y)f(y) = f(x), \forall x \in E.$$

1. Soit f harmonique telle que $\sum_{y\in E} |f(y)|\nu(y) < \infty$. Montrer que $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
2. Supposons que E est fini et qu'il y a deux états absorbants a et b : $p(a,a) = p(b,b) = 1$. Soit $\sigma_x := \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}$ et $T := \sigma_a \wedge \sigma_b$.
   (a) Montrer que : $\mathbb{P}(\forall n \geq 0, X_n = c \mid X_0 = c) = 1$, si $c = a$ ou b.
   (b) On note $P(x,A) = P(x, \mathbb{1}_A)$. Supposons que, pour tout $x \in E$, $P(x, \{a,b\}) > 0$. On note
   $$\xi := \inf\{P(x,\{a,b\}) : x \in E \setminus \{a,b\}\} > 0$$
   et
   $$A_n := \{X_i \neq a, X_i \neq b, \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n\}.$$
   Montrer que :
   $$\mathbb{P}_x(A_n) \leq (1-\xi)^n.$$
   En déduire que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$.
3. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$ et soit f harmonique, bornée et telle que $f(a) \neq f(b)$. Calculer
   $$\mathbb{P}_x(X_T = a) \text{ et } \mathbb{P}_x(X_T = b).$$
4. Étudier le cas où $E = \{0, \ldots, N\}$, $N \geq 3$ entier, $p(0,0) = p(N,N) = 1$ et $p(x,x+1) = p(x,x-1) = 1/2$, pour $1 \leq x \leq N-1$.

Exercice 12 *Modèle de Wright-Fisher - le retour*
Soient k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On considère la chaîne de Markov $(X_n^N)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E := \{0, \ldots, N\}$, issue de $X_0^N := k$ et dont la matrice de transition est donnée par :

$$p(x,y) = \mathbb{P}(X_{n+1}^N = y | X_n^N = x) = \binom{N}{y} \left(\frac{x}{N}\right)^y \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{N-y}.$$

1. Que valent $p(0,k)$ et $p(N,k)$?
2. Déterminer les états récurrents et transitoires de la chaîne.
3. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que (X_n^N) est une martingale qui converge vers une variable X_∞^N. Que valent les probabilités de fixation en 0 et N ?
4. Déterminer les états récurrents et transitoires si on considère le modèle avec taux de mutation $(u,v) \in]0,1[^2$, c'est-à-dire la chaîne $(\widetilde{X}_n^N)_{n\geq 0}$ dont la matrice de transition est
   $$\widetilde{p}(x,y) = \binom{N}{y} \left((1-u)\frac{x}{N} + v\left(1 - \frac{x}{N}\right)\right)^y \left((u\frac{x}{N} + (1-v)\left(1 - \frac{x}{N}\right)\right)^{N-y}.$$

Exercice 13 *Encore un modèle de génétique*
Une population cellulaire comprend N cellules qui peuvent être de deux types : A ou a. On passe d'une génération à la suivante en dédoublant chaque cellule mère et en choisissant au hasard N cellules parmi les $2N$. Les choix successifs sont supposés indépendants. On note X_n le nombre de cellules de type A de la n-ième génération.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont la probabilité de transition vaut :
$$p(x,y) := \frac{\binom{2x}{y}\binom{2(N-x)}{N-y}}{\binom{2N}{N}}.$$
2. Montrer que 0 et N sont des états absorbants. Si on note $\sigma_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$, prouver que :
$$\mathbb{P}_x(\sigma_N < \sigma_0) = x/N \text{ et } \mathbb{P}_x(\sigma_0 < \sigma_N) = 1 - x/N.$$

Exercice 14 *Classification des états - échauffement*
Sur les espaces d'états $\{1,2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$ respectivement, on considère des chaînes de Markov de matrices de transitions respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les états transitoires et les classes de récurrence de ces chaînes.

Exercice 15 *Classification et probabilités d'absorption I*
Sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition :

$$P := \begin{pmatrix} 4/10 & 3/10 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 5/10 & 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/10 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents, transitoires ?
2. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).
3. Sans faire aucun calcul, déterminer les probabilités d'absorption dans la (ou les) classe(s) de récurrence.

Exercice 16 *Classification et probabilités d'absorption II*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1,2,\ldots,6\}$ et de matrice de transition

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer quels sont les états transitoires et les états récurrents.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.

Exercice 17 *Ruine du petit joueur*
A joue contre B une suite de pile ou face non biaisés et indépendants. À chaque partie, le joueur qui gagne reçoit 1 euro, l'autre en perd un. La somme de leur fortunes, constante au cours du jeu, est de 4 euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On modélise l'évolution de la fortune de A par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dont la matrice de transition donnée ci-dessous. On admettra que lorsque n tend vers l'infini, la puissance $n-$ième de la matrice P converge vers la matrice P^∞ également donnée ci-dessous.

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^\infty := \lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. établir la classification des états de la chaîne ?
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.
3. Si $X_0 \sim \nu = (\nu_0, \ldots, \nu_4)$, déterminer la loi de X_∞.
4. Montrer que toute probabilité invariante $\mathtt{m}$ pour la chaîne est nécessairement de la forme $\mathtt{m} = (p, 0, 0, 0, 1-p)$, avec $p \in [0, 1]$.
5. Calculer les probabilités que le joueur A gagne le jeu, en fonction de sa fortune initiale $X_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
6. Question facultative : en déduire la durée moyenne de la partie, conditionnellement à ce que le joueur A gagne le jeu, en fonction de $X_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 18 *Modèle de Laplace-Bernoulli.*
N boules noires et N boules blanches sont placées dans deux urnes de sorte que chacune contienne N boules. Après chaque unité de temps on choisit au hasard une boule de chaque urne ; les deux boules ainsi choisies changent d'urne. On note par X_n le nombre de boules noires dans la première urne. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible et trouver sa mesure stationnaire.

Exercice 19 *Correcteurs distraits*
L'épreuve d'un livre est lue par une suite infinie d'éditeurs qui cherchent les fautes. Chaque faute est détectée avec la probabilité $p \in]0, 1[$ à chaque lecture. Entre deux lectures, l'imprimeur corrige les fautes détectées, mais introduit un nombre aléatoire de nouvelles erreurs distribué suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (des erreurs peuvent être introduites même s'il n'y a pas de faute détectée). On suppose que les phénomènes aléatoires sont indépendantes et que les nombres de nouvelles erreurs après chaque lecture sont identiquement distribués. On note X_n le nombre d'erreurs après le n-ième cycle éditeur-imprimeur.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition :

$$p(x, y) := \sum_{k=(x-y)^+}^{x} \binom{x}{k} p^k (1-p)^{x-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y-x+k}}{(y-x+k)!}.$$

2. Calculer $\mathbb{E}_x(e^{itX_1})$.
3. En déduire la fonction caractéristique de X_1, lorsque X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ. En déduire que la loi de Poisson de paramètre λ/p est une mesure stationnaire pour (X_n).
4. Montrer que (X_n) est une chaîne irréductible, récurrente et positive.
5. Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i$.

Exercice 20 *Le score du basketeur*
Un basketeur teste son habileté au lancer franc. Chaque panier lui augmente le score mais un lancer raté lui fait perdre tous les points. On note X_n son score au moment n. On voit $(X_n)_{n\geq 0}$ comme une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de probabilité de transition $P : p(x, x+1) := \theta_x$, $p(x, 0) := 1 - \theta_x$, où $0 < \theta_x < 1$ est la probabilité de marquer le panier lorsqu'il a x points.

1. Soit $\tau_0 := \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$. Calculer $u^{(n)}(0,0) = \mathbb{P}_0(\tau_0 = n)$ et déduire la loi de τ_0 sous $\mathbb{P}_0$. En déduire que 0 est un état transitoire si et seulement si $\prod_{x=0}^{\infty} \theta_x > 0$
2. Étudier la récurrence et la transience des autres états.
3. Calculer $\mathtt{m}(x) = \mathbb{E}_0\Big(\sum_{n=0}^{\tau_0-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}\Big)$. Vérifier que $(\mathtt{m}(x) : x \geq 0)$ est une mesure invariante.

Exercice 21 *Les pannes de la photocopieuse*
On considère une photocopieuse qui tombe en panne en une suite de temps aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots$ et on suppose que $\xi_1, \xi_2 - \xi_1, \ldots$ sont indépendantes, de même loi. On note $p_0 = 0$ et $p_x := \mathbb{P}(\xi_1 = x)$, $x \geq 1$ entier. On suppose que si la photocopieuse tombe en panne elle est réparée instantanément. On note X_n la période de temps qui sépare l'instant n de l'instant de la prochaîne panne.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition $p(0, x) = p_{x+1}$, $p(x + 1, x) = 1$, pour $x \geq 0$.
2. On suppose maintenant $p_x > 0$ pour tout $x \geq 1$. Montrer que la chaîne est récurrente et irréductible.
3. Calculer la loi de X_1 en fonction de celle de X_0. En déduire que si $\sum_{x\geq 1} x\, p_x < +\infty$, il existe une seule mesure invariante.
4. Soit $\tau_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$. Calculer $\mathtt{m}(x) = \mathbb{E}_0\Big(\sum_{n=0}^{\tau_0-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}\Big)$. Que peut-on remarquer ?

Exercice 22 *Chaîne de naissance et de mort*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition P :

$$p(0,0) = r_0,\ p(0,1) = p_0,\ p(x,y) := \begin{cases} p_x & \text{si } y = x+1 \\ r_x & \text{si } y = x \\ q_x & \text{si } y = x-1, \end{cases} \quad \text{pour } x \geq 1,$$

où $0 < p_x, q_x \leq 1$, $p_0 + r_0 = 1$ et pour $x \geq 1$ $r_x \geq 0$, $p_x + q_x + r_x = 1$. On note

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_x := \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x}.$$

1. Étudier les fonctions f vérifiant $Pf(y) = f(y)$, $y \in \{a+1, \ldots, b-1\}$, pour $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$.

2. Soit $\sigma_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$ et $T := \sigma_a \wedge \sigma_b$. Pour $a \leq x \leq b$ montrer que $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$. Exprimer $g(x) := \mathbb{P}_x(X_T = b)$ en fonction des γ_x.
3. Exprimer $\{\sigma_0 = \infty\}$ en fonction des événements $\{\sigma_z < \sigma_0\}$ et calculer $\mathbb{P}_1(\sigma_z \leq \sigma_0)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_1(\sigma_0 = \infty)$. et une condition de récurrence de la chaîne en fonction des γ_x.
4. Montrer que toute mesure $\mathtt{m}$ satisfaisant

$$\mathtt{m}(x)p(x,y) = \mathtt{m}(y)p(y,x),\ x, y \in \mathbb{N}$$

est de la forme :

$$\mathtt{m}(x) := \alpha\zeta_x,$$

où on a posé

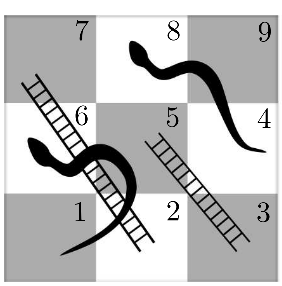
$$\zeta_0 = 1,\ \zeta_x = \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x}.$$

Montrer que la mesure définie par la formule précédente est stationnaire.
5. Sous quelles conditions il y a existence une probabilité stationnaire ? L'exprimer alors en fonction des ζ_x.
6. On suppose $p_x = p$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $q_x = q$, pour tout $x \geq 1$. Étudier la récurrence de la chaîne suivant les différentes valeurs de p, q. Sous quelles hypothèses sur p et q il y a existence une probabilité stationnaire ?

Exercice 23 *Entomologie*
Une puce saute chaque seconde au hasard d'un sommet d'un triangle à un autre, indépendamment et uniformément. Une tique, quant à elle, choisit deux fois plus souvent de sauter dans le sens direct que dans le sens indirect. Quelles sont les mesures réversibles (resp. invariantes) des deux dynamiques ? Dans les deux cas, estimer lorsque n est grand la probabilité que l'animal se retrouve à son sommet de départ au bout de n sauts.

Exercice 24 *La souris et le conditionnement*
Une souris se promène sur un domaine carré à 4×4 cases (les déplacements diagonaux sont interdits). À chaque étape, elle passe de la case qu'elle occupe à l'une des r cases voisines adjacentes avec la probabilité $1/r$ (si une case est centrale, $r = 4$; si une case est au bord, mais pas au coin, $r = 3$; si une case est au coin, $r = 2$). Soit X_n la position de la souris à l'étape n. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Calculer la probabilité invariante.

Exercice 25 *Serpents et échelles*



On joue au jeu suivant : un joueur débute à la case 1 et à chaque temps n, lance une pièce équilibrée. Selon le résultat, il avance d'une ou deux cases sur le plateau de jeu. S'il arrive au pied d'une échelle, il grimpe en haut de l'échelle ; s'il arrive sur la tête d'un serpent, il descend à la queue. Le but est d'atteindre la case 9.

1. Combien de tours en moyenne doit-on jouer pour terminer le jeu ?
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur ayant atteint la case 5 termine le jeu sans retomber à la case 1 ?

Exercice 26 *Niveaux et excursions d'une marche aléatoire simple*
Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $\sigma_a := \inf\{n \geq 0,\ S_n = a\}$ le temps d'atteinte de a par la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, σ_a est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
2. Montrer que $(\sigma_{a+1} - \sigma_a)_{a\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables i.i.d.

On pose $\tau_0^0 := 0$ et par récurrence, on définit $\tau_0^{n+1} := \inf\{n > \tau_0^n,\ S_n = 0\}$ le $n+1$-ième temps de retour en zéro de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

3. Montrer que la loi de $\Delta_0^n := \tau_0^{n+1} - \tau_0^n$ ne dépend pas de n.
4. Montrer que les excursions $(S_{\tau_0^k}, \ldots, S_{\tau_0^{k+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d.

Exercice 27 *La ruine du joueur II*
Un joueur dispose d'un capital de x euro. A chaque temps n, il mise 1 euro sur le résultat d'un lancer de pièce (modélisé par une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$) ; il arrête de jouer lorsqu'il est ruiné. On note X_n le capital du joueur après le temps n. On cherche la probabilité que le joueur soit ruiné en un temps fini i.e. $H_x := \mathbb{P}_x(\exists n, X_n = 0)$.

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov, préciser sa matrice de transition.
2. Indiquer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(H_x)_{x\in\mathbb{N}}$ et conclure.

Exercice 28 *La chaîne serpent*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E de transition P. Pour $\ell \geq 1$, on définit une nouvelle suite à valeurs dans $F = E^{\ell+1}$ en posant $Y_n := (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+\ell})$.

1. Montrer que c'est une chaîne de Markov et préciser sa matrice de transition.
2. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, il en est de même pour $(Y_n)_{n\geq 0}$ si on restreint l'espace d'état à $\widetilde{F} = \{(x_0, \ldots, x_\ell) \in E^{\ell+1},\ p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\ldots p(x_{\ell-1},x_\ell) > 0\}$.
3. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une distribution stationnaire $\mathtt{m}$, alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ admet aussi une distribution stationnaire.

Exercice 29 *Estimation des probabilités de transition*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, irréductible apériodique récurrente positive, de distribution stationnaire $\mathtt{m}$.

1. Quelle est la distribution stationnaire de la chaîne $((X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+\ell}))_{n\geq 0}$?
2. En déduire que si $g : E^{\ell+1} \to \mathbb{R}_+$ est telle que $\mathbb{E}_{\mathtt{m}}[g(X_0, \ldots, X_\ell)] < +\infty$, alors pour toute loi initiale ν, $\mathbb{P}_\nu$-presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, on a :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+\ell}) \longrightarrow \mathbb{E}_{\mathtt{m}}[g(X_0, \ldots, X_\ell)].$$

On suppose que P et $\mathtt{m}$ sont inconnues. On souhaite estimer les probabilités de transition $p(x,y)$ à l'aide de la seule observation d'une trajectoire $(X_n(\omega))_{n\geq 0}$.

3. Soit $(x,y) \in E^2$, déterminer les limites presque sûrs lorsque n tend vers l'infini de
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x, X_{k+1} = y\}}.$$
4. En déduire un estimateur consistant (i.e. convergent) de la probabilité de transition $p(x,y)$.