Master Mathématiques 1ère année

Probabilités et Modélisations Stochastiques : 2006-2007

3. Chaînes de Markov

3.1. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, de loi initiale μ et de probabilité de transition π. Étudier si les suites suivantes sont des chaînes de Markov et calculer, éventuellement, les probabilités de transition :

i) $Y_n := X_{2n}$;

ii) $Y'_n := X_{n+k}$ et $Y''_n := X_{ln}$, où k, l sont deux entiers $k \geqslant 1$, $l > 1$;

iii) $\tilde{Y}_m := X_{n_m}$, où $\{n_m : m \geqslant 0\} \subset \mathbb{N}$ est une suite croissante non-bornée ;

iv) $\bar{Y}_n := f(X_n)$, où $f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ est une bijection mesurable ;

v) $Z_n := (X_n, X_{n+1})$;

vi) $\bar{Z}_n := (X_n, f(X_n))$, où $f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ est mesurable.

3.2. Soit $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$. Étudier si les suites suivantes sont des chaînes de Markov ou pas :

i) $S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_n$;

ii) $M_n := \max\{S_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$;

iii) $X_n := M_n - S_n$;

iv) $Y_n := \xi_n \xi_{n+1}$;

v) $Z_n := (\xi_n + \xi_{n+1})/2$.

3.3. Soient $\{X_n : n \geqslant 0\}$ et $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ deux chaînes de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose $Z_n := X_n + Y_n$. La suite $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ est-elle nécessairement une chaîne de Markov ?

3.4. On suppose que le temps qu'il fera demain depend des deux jours précédents. On suppose que :

$$\mathbb{P}\{\text{il pleut demain} \mid \text{il a plu hier et aujourd'hui}\} = 0,7$$

$$\mathbb{P}\{\text{il pleut demain} \mid \text{il a plu aujourd'hui mais pas hier}\} = 0,5$$

$$\mathbb{P}\{\text{il pleut demain} \mid \text{il a plu hier mais pas aujourd'hui}\} = 0,4$$

$$\mathbb{P}\{\text{il pleut demain} \mid \text{il n'a pas plu ni hier, ni aujourd'hui}\} = 0,2.$$

Montrer qu'on peut modéliser ceci par une chaîne de Markov. Quelle est la probabilité, sachant qu'il a plu lundi et mardi qu'il pleuve jeudi ?

3.5. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, 1\}$ et de probabilité de transition :

$$\pi := \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \ 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1.$$

i) Montrer que pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$:

$$\pi^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta = 0$? On supposera pour la suite de l'exercice que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

ii) Vérifier (par récurrence) que, pour toute loi initiale μ :

$$\mathbb{P}_\mu(X_n = 0) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

iii) Si $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$, montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi ν. Que vaut ν ? On supposera pour la suite de l'exercice que $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$.
iv) (*Mesure stationnaire*) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_\nu(X_n \in A) = \nu(A).$$

v) Calculer

$$\mathrm{Cov}_\nu(X_n, X_{n+1}) := \mathbb{E}_\nu(X_n X_{n+1}) - \mathbb{E}_\nu(X_n)\mathbb{E}_\nu(X_{n+1}).$$

Les variables aléatoires $\{X_n : n \geqslant 0\}$ sont-elles indépendantes ?
vi) Calculer le potentiel de la chaîne.
vii) On note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que :

$$\mathbb{E}_\nu(S_n) = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}, \ \mathrm{Var}_\nu(S_n) \leqslant C\,n,$$

où C est une constante.
viii) (*Loi faible des grands nombres*) En déduire que :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

en probabilité sous $\mathbb{P}_\nu$, sous $\mathbb{P}_0$ et sous $\mathbb{P}_1$.

3.6. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ de probabilité de transition π donnée par :

$$\pi(x,y) := \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \qquad 0 \leqslant x \leqslant N-1,$$

où $0 < p < 1$ et avec N un état absorbant.
i) Classifier les états de la chaîne.
ii) Soit $T := \inf\{n \geqslant 0 : X_n = N\}$. Calculer, pour $x \in E$, $\mathbb{E}_x(T)$.
iii) Une pièce donne pile avec une probabilité p et elle est lancée successivement plusieurs fois. On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, avec probabilité 1, on obtient N fois consécutives pile avec un nombre fini de lancers. Combien de lancers sont nécessaires en moyenne ?

3.7. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, de loi initiale μ et de probabilité de transition π. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* ou *invariante* si

$$\int_E \pi(x, dy)|f(y)| < \infty \ \text{ et } \ \int_E \pi(x,dy) f(y) = f(x), \, \forall x \in E.$$

i) Soit f invariante telle que $\int_E |f(y)|\mu(dy) < \infty$. Montrer que $\{f(X_n) : n \geqslant 0\}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

ii) Supposons que E est fini et qu'il y a deux états absorbants a et b : $\pi(a,a) = \pi(b,b) = 1$. Soit $\sigma(x) := \inf\{n \geqslant 0 : X_n = x\}$ et $T := \sigma(a) \wedge \sigma(b)$.
a) Montrer que : $\mathbb{P}(\forall n \geqslant 0, X_n = c \mid X_0 = c) = 1$, si $c = a$ ou b.
b) Supposons que, pour tout $x \in E$, $\pi(x, \{a,b\}) > 0$. On note

$$\xi := \inf\{\pi(x, \{a,b\}) : x \in E \setminus \{a,b\}\} > 0$$

et

$$A_n := \{X_i \neq a, X_i \neq b, \text{ pour tout } 0 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Montrer que :

$$\mathbb{P}(A_n \mid X_0 = x) \leqslant (1-\xi)^n.$$

En déduire que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$.
iii) On suppose que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$ et soit f invariante, bornée et telle que $f(a) \neq f(b)$. Calculer

$$\rho_{x,a} = \mathbb{P}_x(X_T = a) \text{ et } \rho_{x,b} = \mathbb{P}_x(X_T = b).$$

iv) Étudier le cas où $E = \{1, \ldots, M\}$, $M \geqslant 3$ entier, $\pi(1,1) = \pi(M,M) = 1$ et $\pi(i,i+1) = \pi(i,i-1) = 1/2$, pour $2 \leqslant i \leqslant M-1$.

3.8. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ ayant la probabilité de transition

$$\pi := \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On définit la suite $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ par

$$Y_n := \begin{cases} 1, & \text{si } X_n = 1 \text{ ou } 2 \\ 2, & \text{si } X_n = 3. \end{cases}$$

Montrer que si $\alpha = \beta$, alors $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov sur $F = \{1,2\}$.

3.9. Soit $\{\xi_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $E = \{1, \ldots, N\}$ et de loi uniforme sur E.
i) Soit $X_n := \mathrm{card}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov et calculer sa probabilité de transition π.
ii) Soit $v = (x_1, \ldots, x_N)^*$ un vecteur propre pour la valeur propre λ de π. Vérifier que :

$$\left(\lambda - \frac{j}{N}\right) x_j = \left(1 - \frac{j}{N}\right) x_{j+1}.$$

En déduire que π admet N valeurs propres distinctes, λ_i, $i = 1, \ldots, N$, et que les vecteurs propres correspondants v^i peuvent être écrits :

$$v^i := \left(\frac{\mathrm{C}_i^1}{\mathrm{C}_N^1}, \frac{\mathrm{C}_i^2}{\mathrm{C}_N^2}, \ldots, \frac{\mathrm{C}_i^i}{\mathrm{C}_N^i}, 0, \ldots, 0\right)^*.$$

iii) Montrer que π^* admet λ_i, $i = 1, \ldots, N$, comme valeurs propres et $w^i = (w_1^i, \ldots, w_N^i)$ comme vecteur propre associé à λ_i, avec

$$w_j^i = (-1)^{j-i} \mathrm{C}_{N-i}^{j-i},\ j = 1, \ldots, N.$$

iv) Vérifier que v^i est orthogonal à w^j si $i \neq j$ (on pourra calculer $(\pi v^i)^* w^i$).
v) En déduire :

$$\pi^n = \sum_{i=1}^{N} \frac{v^i (w^i)^*}{(w^i)^* v^i} \lambda_i^n.$$

En particulier :

$$\pi_{jk}^n = \begin{cases} \mathrm{C}_{N-j}^{N-k} \sum_{l=0}^{k-j} (-1)^{k-j-l} \mathrm{C}_{k-j}^{l} \left(\frac{l+j}{N}\right)^N, & \text{si } k \geqslant j \\ 0, & \text{si } k < j. \end{cases}$$

3.10. On joue à pile ou face, avec la probabilite p d'obtenir face. Les lancers sont indépendants. On dit qu'on est dans l'état $E_1 := (F, F)$ à l'instant n si l'on a tiré face en n et $n-1$; de même on note $E_2 := (P, P)$, $E_3 := (P, F)$, $E_4 := (F, P)$.
i) Montrer que la suite des lancers constitue une chaîne de Markov et calculer sa probabilité de transition π.
ii) Trouver la probabilité de passer de E_i à E_j pendant le laps de temps k.
iii) Calculer la mesure stationnaire. Que peut-on dire quant à la récurrence de la chaîne ?

3.11. *Modèle de Wright.* Une population cellulaire comprend $2N$ cellules qui peuvent être de deux types : A ou a. Si la population mère compte j cellules de type A et $2N-j$ cellules de type a ; à la génération suivante le nombre de cellules de type A vaut $\sum_{i=1}^{2N} Z_i$, où les variables Z_i sont indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(Z_i = 1) = j/(2N)$ et $\mathbb{P}(Z_i = 0) = (2N-j)/(2N)$. On note X_n le nombre de cellules de type A de la n-ième génération.
i) Vérifier que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov et donner sa probabilité de transition π.
ii) Que vaut $\pi(0, j)$ et $\pi(2N, j)$? La chaîne est elle irréductible ? Quels sont les états récurrents ?
iii) Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une martingale qui converge vers une variable X_∞. Que valent les probabilités de "fixation" en A et a ?

3.12. Une population cellulaire comprend N cellules qui peuvent être de deux types : A ou a. On passe d'une génération à la suivante en dédoublant chaque cellule mère et en choisissant au hasard N cellules parmi les $2N$. Les choix successifs sont supposés indépendants. On note X_n le nombre de cellules de type A de la n-ième génération.
i) Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov dont la probabilité de transition vaut :

$$\pi(x, y) := \frac{\mathrm{C}_{2x}^{y} \, \mathrm{C}_{2(N-x)}^{N-y}}{\mathrm{C}_{2N}^{N}}.$$

ii) Montrer que 0 et N sont des états absorbants. Si on note $T_i := \inf\{n \geqslant 0 : X_n = i\}$, prouver que :

$$\mathbb{P}_x(T_N < T_0) = x/N \text{ et } \mathbb{P}_x(T_0 < T_N) = 1 - x/N.$$

3.13. *Modèle de Ehrenfest.* Étant donné deux enceintes séparées par une paroi poreuse et contenant ensemble N particules diffusant à travers cette paroi, on décrit le nombre aléatoire

X_n de particules se trouvant dans la première enceinte ($0 \leqslant X_n \leqslant N$) aux instants successifs $n \in \mathbb{N}$ de transition des particules par une chaîne Markov de probabilité de transition :

$$\pi(x, x-1) := \frac{x}{N},\ \pi(x, x+1) := \frac{N-x}{N},\ 0 \leqslant x \leqslant N.$$

À chaque instant n, les probabilités que la transition se fasse de la première enceinte vers la seconde ou de la seconde enceinte vers la première sont donc proportionnelles aux nombres de particules en présence dans la première et la deuxième enceinte :

$$\frac{\pi(x, x-1)}{x} = \frac{\pi(x, x+1)}{N-x}.$$

Montrer que cette chaîne est récurrente irréductible et trouver sa mesure invariante.

3.14. *Modèle de Laplace-Bernoulli.* N boules noires et N boules blanches sont placées dans deux urnes de sorte que chacune contienne N boules. Après chaque unité de temps on choisit au hasard une boule de chaque urne ; les deux boules ainsi choisies changent d'urne. On note par X_n le nombre de boules noires dans la première urne. Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov irréductible et trouver sa mesure stationnaire.

3.15. Soit X_n le nombre de particules présentes à chaque instant n dans un volume donné V. On fait l'hypothèse que, pendant l'intervalle de temps $[n, n+1[$, chacune des X_n particules a la probabilité p, $0 < p < 1$, de quitter le volume considéré V, et que, d'autre part, pendant cet intervalle de temps, un nombre aléatoire de particules suivant une loi de Poisson, de paramètre λ, entre dans V. On suppose, en outre, que les divers phénomènes aléatoires ainsi considérés sont indépendants les uns des autres.
i) Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition :

$$\pi(x, y) := \sum_{k=(x-y)^+}^{x} \mathrm{C}_x^k p^k (1-p)^{x-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y-x+k}}{(y-x+k)!}.$$

ii) Calculer $\mathbb{E}_x(e^{itX_1})$.
iii) En déduire la fonction caractéristique de X_1, lorsque X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ. En déduire que la loi de Poisson de paramètre λ/p est une mesure stationnaire pour $\{X_n : n \geqslant 0\}$.
iv) Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne irréductible, récurrente et positive.
v) Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i$.

3.16. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de probabilité de transition $\pi : \pi(n, n+1) := \theta_n$, $\pi(n, 0) := 1 - \theta_n$, où $0 < \theta_n < 1$.
i) Soit $T := \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 0\}$. Calculer la loi de T lorsque $X_0 = 0$. En déduire que 0 est un état transitoire si et seulement si $\prod_{n=0}^{\infty} \theta_n > 0$.
ii) Étudier la récurrence et la transience des autres états.
iii) Calculer $\nu(k) := \mathbb{E}_0 \left(\sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}} \right)$.
Vérifier que $(\nu(k) : k \geqslant 0)$ est une mesure invariante.

3.17. On considère une machine qui tombe en panne en une suite de temps aléatoires $\xi_1, \xi_2, \dots$ et on suppose que $\xi_1, \xi_2 - \xi_1, \dots$ sont indépendantes, de même loi. On note $p_k := \mathbb{P}(\xi_1 = k)$, $k \geqslant 0$. On suppose que si la machine tombe en panne elle est réparée instantanément. Soit X_n la période de temps qui sépare n de la prochaîne panne.
i) Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition $\pi(0,k) = p_k$, $\pi(k+1,k) = 1$, pour $k \geqslant 0$.
ii) On suppose maintenant $p_k > 0$ pour tout $k > 0$. Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est récurrente et irréductible.
iii) Calculer la loi de X_1 en fonction de celle de X_0. En déduire que si $\sum_{k\geqslant 1} kp_k < \infty$, il existe une seule mesure invariante.
iv) Soit $T := \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 0\}$. Calculer

$$\nu(k) := \mathbb{E}_0 \left(\sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}} \right).$$

Que peut-on remarquer ?

3.18. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$, de probabilité de transition π :

$$\pi(0,0) = 1,\ \pi(i,j) := e^{-i} \frac{i^j}{j!},\ i \geqslant 1,\ j \geqslant 0.$$

i) Classifier les états de cette chaîne. Quels sont les états récurrents ? transients ?
ii) Montrer que $f(j) = j$ est harmonique et que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une $\mathbb{P}_x$-martingale qui converge vers une variable aléatoire X_∞.
iii) Quelle est la loi de X_∞ ?

3.19. Une souris se promène sur un domaine carré à 4×4 cases (les déplacements diagonaux sont interdits). À chaque étape, elle passe de la case qu'elle occupe à l'une des r cases voisines adjacentes avec la probabilité $1/r$ (si une case est centrale, $r = 4$; si une case est au bord, mais pas au coin, $r = 3$; si une case est au coin, $r = 2$). Soit X_n la position de la souris à l'étape n.
i) Prouver que la chaîne $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est irréductible et récurrente.
ii) Calculer la probabilité invariante.

3.20. L'épreuve d'un livre est lue par une suite infinie d'editeurs qui cherchent les fautes. Chaque faute est détectée avec la probabilité p à chaque lecture. Entre deux lectures, l'imprimeur corrige les fautes détectées, mais introduit un nombre aléatoire de nouvelles erreurs distribué suivant une loi de Poisson (des erreurs peuvent être introduites même s'il n'y a pas de faute détectée). On suppose que les phénomenes aléatoires sont indépendantes et que les nombres de nouvelles erreurs après chaque lecture sont identiquement distribués. On note X_n le nombre d'erreurs après le n-ième cycle editeur-imprimeur. Trouver l'expression de la fonction génératrice $G_n(s) = \mathbb{E}(s^{X_n})$. Calculer la loi stationnaire de la chaîne $\{X_n : n \geqslant 0\}$.

3.21 Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, dénombrable, et de probabilité de transition π. On suppose qu'il existe un état $i_0 \in E$ tel que i_0 conduit à tout autre état $j \in E$ et que si on note $T_{i_0} := \inf\{n \geqslant 0 : X_n = i_0\}$, alors $\mathbb{P}_j(T_{i_0} < \infty) = 1$ pour tout $j \in E$. Montrer que la chaîne est récurrente.

3.22. *Chaîne de naissance et de mort* Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition π :

$$\pi(0,0) = r_0,\ \pi(0,1) = p_0,\ \pi(i,j) := \begin{cases} p_i & \text{si } j = i+1 \\ r_i & \text{si } j = i \\ q_i & \text{si } j = i-1, \end{cases} \qquad \text{pour } i \geqslant 1,$$

où $0 < p_i, q_i \leqslant 1$, $p_0 + r_0 = 1$ et pour $i \geqslant 1$ $r_i \geqslant 0$, $p_i + q_i + r_i = 1$. On note

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_i := \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i}.$$

i) Étudier les fonctions u vérifiant $\pi u(i) = u(i)$, $i \in \{a+1, \ldots, b-1\}$, pour $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$.
ii) Soit $T_i := \inf\{n \geqslant 0 : X_n = i\}$ et $\tau := T_a \wedge T_b$. Pour $a \leqslant i \leqslant b$ montrer que $\mathbb{P}_i(\tau < \infty) = 1$. Exprimer $v(i) := \mathbb{P}_i(X_\tau = b)$ en fonction des γ_i.
iii) Exprimer $\{T_0 = \infty\}$ en fonction des événements $\{T_n < T_0\}$ et calculer $\mathbb{P}_1(T_n \leqslant T_0)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty)$ et une condition de récurrence de la chaîne en fonction des γ_i.
iv) Montrer que toute mesure ν satisfaisant

$$\nu(i)\pi(i,j) = \nu(j)\pi(j,i),\ i, j \in \mathbb{N}$$

est de la forme :

$$\nu(i) := \alpha\zeta_i,$$

où on a posé

$$\zeta_0 = 1,\ \zeta_i = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}.$$

Montrer que la mesure définie par la formule précédente est stationnaire.
v) Sous quelles conditions existe-t-il une probabilité stationnaire ? L'exprimer alors en fonction des ζ_i.
vi) On suppose $p_i = p$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $q_i = q$, pour tout $i \geqslant 1$. Étudier la récurrence de la chaîne suivant les différentes valeurs de p, q. Sous quelles hypothèses sur p et q existe-t-il une probabilité stationnaire ?

3.23. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une chaîne de Markov sur $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ ayant la probabilité de transition

$$\pi := \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_{N-2} & 0 & p_{N-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & q_{N-1} & 0 & p_{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & q_N & p_N \end{pmatrix},$$

où $0 < p_i, q_i < 1$ et $p_i + q_i = 1$, $i = 0, \ldots, N$.
i) Soit $A := \{0, N\}$. Déterminer les probabilités pour que la chaîne atteigne l'état N avant d'atteindre l'état 0,

$$p_i(N, A) := \mathbb{P}_i(T_A < \infty, X_{T_A} = N),\ T_A := \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}.$$

ii) Trouver $p_i(N, A)$ dans le cas où $p_i = p = 1 - q$, $i = 0, \ldots, N$.
iv) Sous les hypothèses du point précedent, trouver la mesure stationnaire.

3.24. *Chaîne autorégressive d'ordre 1 (AR1).* Soit $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, centrées et de variance σ^2. Soit X_0 une variable aléatoire réelle, indépendante de cette suite. Pour tout réel θ, $|\theta| < 1$ on définit par récurrence :

$$X_0^\theta := X_0,\ X_{n+1}^\theta := \theta\, X_n^\theta + \xi_{n+1},\ n \geqslant 0.$$

i) Montrer que $\{X_n^\theta : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov.
ii) Soit

$$Y_n^\theta := \theta^n X_0 + \xi_1 + \theta\xi_2 + \ldots + \theta^{n-1}\xi_n,\ n \geqslant 0.$$

Montrer que $\{Y_n^\theta : n \geqslant 0\}$ converge dans L^2 et presque sûrement vers une variable aléatoire Y^θ de loi μ^θ. Prouver que $\{X_n^\theta : n \geqslant 0\}$ converge en loi vers μ^θ.
iii) Montrer que :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}(X_n^\theta) = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}[(X_n^\theta)^2] = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}.$$

3.25. *Modèle Galton-Watson.* Soit $\nu = \{p_k : k \geqslant 0\}$ une probabilité sur $\mathbb{N}$. Soit la chaîne $\{X_n : n \geqslant 0\}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1,\ \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \nu^{\star i}(j),\ \nu^{\star 0} = \delta_0.$$

i) Décrire le modèle associé à cette chaîne.
ii) Observer que 0 est un état absorbant. Classifier les autres états.
iii) Soit $G_n(s) = \mathbb{E}(s^{X_n})$ la fonction génératrice de X_n. Calculer G_n en fonction de $G(s) := \sum_{k\geqslant 0} s^k \mathbb{P}_1(X_1 = k) = \mathbb{E}_1(s^{X_1})$.
iv) Soit $A := \{\exists n : X_n = 0\}$ l'événement extinction de la chaîne. Prouver que $\mathbb{P}(A) = \rho$ où ρ est la plus petite racine de l'équation $G(s) = s$.
v) Montrer que $\mathbb{P}(A) < 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}_1(X_1) = \sum_{k\geqslant 0} kp_k > 1$.
vi) Montrer que $\mathbb{E}[X_n \mid X_{n-1}] = mX_{n-1}$, où m est l'espérance de ν, $m = \sum_{k\geqslant 0} kp_k$. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$. Retrouver le résultat en utilisant la fonction G_n.
vii) Supposons $m > 1$ et soit ρ l'unique solution de $G(s) = s$ dans $[0, 1[$. Montrer que $M_n = \rho^{X_n}$ est une martingale et retrouver le fait que $\rho = \mathbb{P}(T_0 < \infty)$, où $T_0 = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 0\}$.
viii) On note σ^2 la variance de ν. Montrer que $\mathbb{E}[X_n^2 \mid X_{n-1}] = \sigma^2 X_{n-1} + m^2 X_{n-1}^2$. En déduire $\mathrm{Var}(X_n)$. Retrouver le résultat en utilisant la fonction G_n.
ix) Supposons $m > 1$ et soit $W_n = X_n/m^n$. Montrer que W_n est une martingale bornée dans L^2 qui converge vers une variable aléatoire W_∞. Vérifier que la fonction caractéristique φ de W_∞ satisfait $G(\varphi(t)) = \varphi(mt)$.
x) Que vaut $\mathbb{P}_i(A)$?

3.26. **i)** Montrer que, pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}(X \mid X > 0) \leqslant \mathbb{E}(X^2)/\mathbb{E}(X)$.
ii) Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ un processus de Galton-Watson avec $X_0 = 1$ et $\mathbb{P}(X_1 = k) = qp^k$, $k \geqslant 0$, avec $p > 1/2$ et $q = 1 - p$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{\mu^n} \mid X_n > 0\right) \leqslant \frac{2p}{p-q},\ \mu := p/q.$$

iii) Montrer que :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{\mu^n} \mid X_n > 0\right) = \frac{p}{p-q}.$$

3.27. Soit $\{p(x) : x \in \mathbb{Z}\}$ une probabilité sur $\mathbb{Z}$, et soit, pour $s \in [0,1]$,

$$\hat{p}(s) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x) e^{2i\pi sx}.$$

i) Montrer que $\int_0^1 \hat{p}(s)ds = p(0)$.
ii) Montrer que $\hat{p}(s) \neq 1$ pour tout $s \neq 0$ si et seulement si le p.g.c.d. des x tels que $p(x) \neq 0$ vaut 1. On pourra considérer

$$\mathrm{Re}(1-\hat{p}(s)) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x)(1-\cos(2\pi sx)) \geqslant 0.$$

iii) Soit π la probabilité de transition sur $\mathbb{Z}$ définie par $\pi(x,y) := p(x-y)$. Vérifier que le potentiel $U := \sum_{n\geqslant 0} \pi^n$ a la même forme, soit $U(x,y) = u(x-y)$.
iv) On suppose que p est symétrique, c'est-à-dire $p(-x) = p(x)$, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, et que $\hat{p}(s) \neq 1$ pour tout $s \neq 0$. Montrer que :
a) $\mathbb{Z}$ est une classe de récurrence si $\int_0^1 ds/(1-\hat{p}(s)) = \infty$;
b) tous les états sont transitoires si $\int_0^1 ds/(1-\hat{p}(s)) < \infty$.
v) Soit ν la loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\nu(-2) = \nu(-1) = \nu(1) = \nu(2) = 1/4.$$

Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi ν. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\{S_n : n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition $\pi(x,y) = \nu(x-y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$.
vi) Montrer que $\hat{\nu}(s) < 1$, pour tout $s \neq 0$(modulo 1).
vii) Pour $y \in \mathbb{Z}$, soit $p_n(y) := \mathbb{P}(S_n = y)$ et $U(y) := \sum_{n\geqslant 0} p_n(y)$. Prouver que :
a) $\hat{p}_n(s) = [\hat{\nu}(s)]^n$;
b) $\hat{U}(s) = 1/(1-\hat{\nu}(s))$.
viii) Montrer que $\int_0^1 ds/(1-\hat{\nu}(s)) = \infty$.
ix) Montrer que la chaîne est irréductible.
x) Que vaut $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{1}_{\{S_n=y\}}$?