Université de Rennes 1 | Année 2020-2021
Licence de Mathématiques | L2 CMR et L3 SSF

Feuille d'exercices # 2 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 Établir que la limite simple d'une suite de fonctions convexes de I vers $\mathbb{R}$ est convexe.

Exercice 2 Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si (t_n) désigne une suite d'éléments de $[a, b]$ convergeant vers $t \in [a, b]$ alors $\lim_{n\to\infty} f_n(t_n) = f(t)$.

Exercice 3 Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ décroissante telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 4 Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice 5 Pour $n \geq 1$ entier, on pose $f_n(t) = t^n \ln(t)$ avec $t \in]0, 1]$ et $f_n(0) = 0$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 6 Étudier la convergence uniforme de $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{t}{n(1 + t^n)}$.

Exercice 7 Calculer la limite simple f de la suite (f_n), où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(t) = \dfrac{t}{1 + nt^2}$. Calculer, pour n fixé, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)|$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f ?

Exercice 8 On pose $f_n(t) = nt^2 e^{-nt}$ avec $t \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 9 On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{(1 + t^2)^n}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $] - \infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 10 Pour $n \geq 1$ entier et $t \in \mathbb{R}^*$ on pose $f_n(t) = t^2 \sin(\frac{1}{nt})$ et $f_n(0) = 0$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 11 On pose $f_n(t) = e^{-nt} \sin(2nt)$ avec $t \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n), puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, et enfin la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 12 On pose, pour $n \geq 1$ entier et $t \geq 0$, $f_n(t) = \dfrac{1}{(1 + t)^{1+1/n}}$. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n).

Exercice 13 On pose $f_n(t) = 4^n(t^{2^n} - t^{2^{n+1}})$ pour $t \in [0,1]$. Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 14 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n^2 t(1-nt)$ $t \in [0,1/n]$ et $f_n(t) = 0$ sinon. Étudier la limite simple de la suite (f_n). Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ? Enfin, étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$.

Exercice 15 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{3^n\, t}{1 + 3^n\, n\, t^2}$. Étudier la limite simple de la suite (f_n). Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ? Si la réponse est non donner au moins deux façons de la justifier.

Exercice 16 Pour $x \in [0,\pi/2]$, on pose $f_n(t) = n \sin t \cos^n t$. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n). Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ? Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $[0,\pi/2]$.

Exercice 17 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n(t^n - t^{n+1})$. déterminer l'ensemble de convergence C de la suite (f_n) ainsi que sa limite. Calculer, pour n fixé, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)|$. En déduire que (f_n) ne converge pas uniformément sur C. Enfin, étudier la convergence uniforme sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.

Exercice 18 Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(t) = \dfrac{nt^2 e^{-nt}}{1 - e^{-t^2}}$: domaine de définition des fonctions, domaine de convergence de la suite, type de convergence.

Exercice 19 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n^\alpha t(1-t)^n$ Étudier la limite simple de la suite (f_n). Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 20 Montrer que la suite de fonctions $f_n(t) = t(1 + n^\alpha e^{-nt})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t(1 + \sqrt{n}e^{-nt})dt$.

Exercice 21 Étudier la convergence simple, uniforme et normale des série des fonctions

$$f_n(t) = \frac{1}{n^2 + t^2},\ n \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R} \quad ;\ f_n(t) = \ln\left(t + \frac{1}{n}\right),\ n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1]\,;$$
$$f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n},\ n \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R} \quad ;\ f_n(t) = \frac{t^n}{n^2},\ n \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 22 Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n + t^2},\ \text{avec } n \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R} \quad ;\ f_n(t) = \frac{(-t)^n}{n!},\ \text{avec } n \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 23 Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(t+1)},\ \text{avec } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1] \quad ;\ f_n(t) = \frac{(-1)^n t^2}{t^4 + n},\ \text{avec } n \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 24 On introduit les applications sur $[0,+\infty[$, $f_n : t \mapsto \dfrac{t^n e^{-t}}{n!}$. Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n). Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 25 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies, pour $n \geq 1$, par

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } t \in [n^2, n^2+1[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[1,\infty[$ vers une limite f qu'on déterminera.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(t)dt \neq \int_1^\infty f(t)dt$.
3. Déterminer la limite simple S de la série de terme général f_n.
4. Pour $n \geq 1, t \geq 1$, calculer $S(t) - S_n(t)$.
   Montrer que S_n converge uniformément vers S sur $[1,\infty[$.
5. Montrer que S_n ne converge pas normalement vers S.

Exercice 26

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont bien définies et calculer leur primitives F :
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$ sur $[0,2\pi]$, $F(0) = 0$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$, $F(0) = 1$.
2. Vérifier que les fonctions suivantes sont bien définies et calculer leur dérivées
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^3}$ sur $[0,2\pi]$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{(t^2+n^2)^2}$.
   Montrer que la série converge uniformément sur $[-a,a]$, $a > 0$. En déduire qu'elle définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2+n^2}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 Montrer que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nt)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 29 Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{ne^{-nt}}{n^2+1}$, et montrer que f est continue sur D. En déduire que la fonction $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nt}}{n^2+1}$ est de classe C^1 sur D.

Exercice 30 Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose $S(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur I.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $S(t+1) - S(t)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(t)$ en $-1+$.
5. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
6. En déduire un équivalent de $S(t)$ en $+\infty$.

Exercice 31 On fixe $\alpha > 0$ et on pose $f_n(t) = e^{-n^\alpha t}$ et $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$.

Quel est le domaine de définition de f ? f est-elle continue ? Étudier $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.

Exercice 32 Soit $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Étudier la continuité de f sur celui-ci.
2. Montrer que f est strictement décroissante.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent simple de $f(t)$ quand $t \to 0+$.

Exercice 33 Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t}{n+t^2}$.

1. Montrer que la fonction S est bien définie et étudier sa parité.
2. Montrer que la fonction S est continue.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.