Université de Rennes 1 — Année 2020-2021
Licence de Mathématiques — L2 CMR et L3 SSF

Feuille d'exercices # 3 : Séries entières

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières :
$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$; $\sum_{n\geq 0} n! z^n$; $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n$; $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$; $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$.

Exercice 2 Déterminer le rayon de convergence des séries entières :
$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^n}$; $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$; $\sum_{n\geq 0} \ln(n) z^n$; $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n$; $\sum_{n\geq 0} \sin(n\pi/3) z^n$; $\sum_{n\geq 0} e^{(-1)^n} z^n$.

Exercice 3 Déterminer les rayons de convergence des séries entières :
$\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) t^n$; $\sum_{n\geq 0} \sin(e^{-n}) t^n$; $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} t^n$; $\sum_{n\geq 1} [\cos(1/n)]^{n^\alpha} z^n$; $\sum_{n\geq 1} \arctan(n^\alpha) z^n$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 4 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} t^{2n}$?

Exercice 6 Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 7 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 8

1. Soit (a_n) une suite de nombres complexes bornée. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$?
2. Notons f et g les sommes respectives de ces deux séries. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $\int_0^\infty g(t)e^{-t/x} dt$ est convergente. Montrer que dans ce cas, $\int_0^\infty g(t)e^{-t/x} dt = xf(x)$.

Exercice 9 Soit (a_n) une suite de réels tous non nuls. Quelle relation lie les rayons de convergence des séries entières ci-dessous

$$\sum a_n z^n \text{ et } \sum \frac{1}{a_n} z^n.$$

Exercice 10 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum(a_n + b_n)z^n$ est $R = \min(R_a, R_b)$

Exercice 11 Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières définies par $a_0 = 2$, $b_0 = -1$ et $a_n = 2n$, $b_n = 1$, $n \geq 1$. Calculer les rayons de convergence des deux séries. Déterminer leur produit de Cauchy et calculer son rayon de convergence. Que peut-on conclure ?

Exercice 12 Étudier la convergence et préciser la limite éventuelle de (a_n) définie par

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \text{ et } a_0 > 0.$$

Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$? Étudier la convergence de $\sum a_n x^n$ sur le bord de l'intervalle de convergence. On pourra étudier la limite de $1/a_{n+1} - 1/a_n$ et utiliser le théorème de Cesaro.

Exercice 13 Pour t réel, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
3. Établir la continuité de f en -1.
4. Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 14 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$. Pour $t \in]-1, 1[$, on pose $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et on suppose que la fonction S est bornée.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 15 Déterminer les développements en série entière autour de $x = 0$ des fonctions suivantes et préciser leurs rayons de convergence :
$x \mapsto \ln(1-x)$; $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$; $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \arcsin(x)$; $x \mapsto (x+1)\ln(1+x)$.

Exercice 16 Former le développement en série entière de $f : t \mapsto \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$.

Exercice 17 Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sqrt{t^2 + t + 1}$ admet un développement en série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.

Exercice 18 Former le développement en série entière en 0 de la fonction $t \mapsto \ln\left(t^2 - 5t + 6\right)$.

Exercice 19 Réaliser le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + t^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 20 On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. Préciser les domaines de définition et de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$. Déterminer le développement en série entière de f' autour de 0 et préciser son rayon de convergence. En déduire celui de f.

Exercice 21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Déterminer le développement en série entière de f autour de 0 et préciser son rayon de convergence. On pose $g : x \mapsto e^x f(x)$. Déterminer le développement en série entière de g autour de 0 et préciser son rayon de convergence.

Exercice 22 Soit $a \in]-1,1[$. On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n t)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\left|f^{(k)}(t)\right| \leq \frac{1}{1-|a|}.$$
3. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 23 Soient $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 24 Soit $a \in]-1,1[$.Quel est le domaine de définition de $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{t+n}$?
Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$. Développer en série entière $S(t) - \frac{1}{t}$.

Exercice 25

1. Quel est l'ensemble de définition de $f(t) = \dfrac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}$?
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec pour condition initiale $f(0) = 0$.
3. Montrer que f est développable en série entière et en donner le rayon de convergence.

Exercice 26 Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} t^n$.

Exercice 27

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \arctan x$ autour de 0 et préciser son rayon de convergence. En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n\geq 0} (-\frac{1}{3})^n \frac{1}{2n+1}$.
2. Déterminer le développement en série entière de la primitive de $x \mapsto \arctan x$ qui s'annule en 0. En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 28 Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 29 Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} t^{2n}$.

Exercice 30 Soit $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} t^n$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence de f.
2. Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1,1[$
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 31 Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}.$$

En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 32 On pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ et } s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1.$$

Exercice 33 Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par

$$\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = (-1)^n \ln(n) t^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$.
   On note S sa somme.
2. Montrer que
$$\forall t \in]-1,1[,\ S(t) = \frac{1}{1+t}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\big(1+\frac{1}{n}\big) t^{n+1}\Big).$$
3. En déduire que S admet une limite en 1^- et que
$$\lim_{t \to 1^-} S(t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)\Big).$$
4. Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule de Wallis
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$