Feuille d'exercices # 1 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1 Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $N(u) := \sup_{0\le t\le 1} |x + ty|$. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une norme. Représenter la boule unité fermée.

Exercice 2 Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $N(u) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1+t^2}}$. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une norme. La comparer à la norme euclidienne usuelle.

Exercice 3 On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$ distincts et soit $c := \frac{1}{2}(a + b)$. Soit x tel que $d(x, a) = d(x, b)$. Montrer que $d(x, c) < d(x, a)$.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel normé et soient $a, b \in E$ et $r > 0$, $s > 0$. Montrer que $B(a, r) + B(b, s) = B(a + b, r + s)$.

Exercice 5 Soient $x \mapsto N(x)$ et $x \mapsto N'(x)$ deux normes sur un espace vectoriel normé E. On suppose que $B(0, 1) \subset B'(0, 1)$. Montrer que pour tout $x \in E$, $N'(x) \le N(x)$.

Exercice 6 Dans un espace vectoriel normé E montrer que toute boule (ouverte ou fermée) de rayon $r > 0$ est une partie bornée de diamètre $2r$.

Exercice 7 Soient $x \mapsto N(x)$ et $x \mapsto N'(x)$ deux normes sur un espace vectoriel normé E. Montrer l'équivalence

$$\alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x),\ \forall x \in E \Leftrightarrow B\big(a, \frac{r}{\beta}\big) \subset B'(a, r) \subset B\big(a, \frac{r}{\alpha}\big), \forall a \in E \text{ et } r > 0.$$

On a noté ici $B(a, r)$ (resp. $B'(a, r)$) la boule ouverte associée a la norme N (resp. N').
Application : sur $\mathbb{R}^2$ avec les normes 2 et ∞. Illustrer par un dessin.

Exercice 8 On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ de la norme $\|A\|_\infty = \max_{j,k} |a_{jk}|$ ou avec la norme $\|A\|_1 = \sum_{j,k=1}^d |a_{jk}|$. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, $\|AB\|_\infty \le d\,\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ et aussi $\|AB\|_1 \le \|A\|_1\|B\|_1$.

Exercice 9 On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\ge0}$ dans $\mathbb{K}$ sommable c'est-à-dire $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \big\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\ge0} |u_n| < +\infty\big\}$. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et que l'on y définit une norme par $\|u\|_1 = \sum_{n\ge0} |u_n|$.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel normé, également muni d'une structure d'anneau (la deuxième opération notée multiplicativement). On suppose que $\exists\alpha \ge 0 :\ \forall x, y \in E,\ \|xy\| \le \alpha\|x\|\|y\|$. Soient $(x_n)_{n\ge0}$ et $(y_n)_{n\ge0}$ deux suites de E convergentes. Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$.

Exercice 11 Pour $A = (a_{jk}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ on pose $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq d} \sum_{k=1}^{d} |a_{jk}|$. Montrer que $\| \cdot \|$ ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Est-elle aussi une norme sur la structure d'anneau (ou d'algèbre) ?

Exercice 12 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n\to\infty} A_n^n$, où $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda/n \\ \lambda/n & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 A quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $M \neq A$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} M^n = A$?

Exercice 14 Soit $E = \mathrm{C}^1([-1,1], \mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N_3 par $N_1(f) = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|$, $N_2(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)|$ et $N_3(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)| dt$. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E. Comparer N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part.

Exercice 15 Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par : $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$. Étudier ensuite la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général $P_n = \frac{1}{n} X^n$. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 16 Montrer que les seules parties d'un espace vectoriel normé E qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E.

Exercice 17 Montrer que tout fermé F d'un espace vectoriel normé E peut s'écrire comme l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts O_n.

Exercice 18
1. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. Montrer que $\mathring{A} = A$ si et seulement si A est ouvert.
2. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Montrer que $\overline{A} = A$ si et seulement si A est fermé.

Exercice 19 Soit $f : E \to F$ une application continue entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Montrer que si O est un ouvert de F, alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E et si C est un fermé de F alors $f^{-1}(C)$ est un fermé de E. Application : montrer que si f et g sont deux applications continues de E dans F alors l'ensemble $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.

Exercice 20 On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ est convexe. La partie $\mathring{A}$ est-elle convexe ?

Exercice 21 Soit A une partie d'un espace normé E. Montrer que la partie A est fermée si et seulement si $\mathrm{Fr}A \subset A$. Montrer que la partie A est ouverte si et seulement si $A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$.

Exercice 22 Soit A une partie non-vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Pour tout $x \in E$ on note $d_A(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Montrer que la fonction d_A est continue. Est-elle lipschitzienne ?

2. On suppose que A est un fermé borné. Montrer que pour tout $x \in E$ il existe un $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.
3. Est-ce que résultat reste vrai si on suppose seulement A fermé ?

Exercice 23 Soit A une partie non-vide fermée et convexe d'un espace euclidien (de dimension finie, donc) E. Montrer que pour tout $x \in E$ il existe un unique $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$. On note cet élément $\pi_A(x)$. Préciser cet élément lorsque A est un sous-espace vectoriel fermé de E et lorsque A est une boule fermée de E.

Exercice 24 Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$f(x,y) = \frac{x^3}{y}$; $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$; $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$; $f(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^4}$; $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$; $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $f(x,y) = \frac{\sinh x \sinh y}{x+y}$.

Exercice 25 Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exercice 26 Pour $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$, on pose $\langle a, u \rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$. Justifier l'existence de $\langle a, u \rangle$. Montrer que l'application linéaire $\varphi_u : a \mapsto \langle a, u \rangle$ est continue. Même question avec $\psi_a : u \mapsto \langle a, u \rangle$.

Exercice 27 Soit $E = \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$

1. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$. Étudier la continuité de la fonction linéaire $\varphi : f \mapsto f(1) - f(0)$.
2. On munit E de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par $\|f\|_2 = (\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{1/2}$. Pour f et h éléments de E on pose $T_h(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)h(t)dt$. Montrer que T_h est une fonction linéaire continue.
3. On munit E de la $\|\cdot\|_1$ définie par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$. Étudier la continuité de la fonction linéaire $\psi : f \mapsto \int_0^1 tf(t)dt$.

Exercice 28 Soient $E = \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathrm{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par $N_1(f) = \|f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On définit $T : E \to F$ par :

$$\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ \ T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}, \ \ \text{définie par} \ \ T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que T est une application linéaire continue.

Exercice 29 Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par : $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$. On sait que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$ (voir l'exercice 1.15). Montrer que la dérivation est continue pour N_1. Montrer que la dérivation n'est pas continue pour N_2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?