MASTER MATHÉMATIQUES 1ÈRE ANNÉE
PROBABILITÉS ET MODÉLISATIONS STOCHASTIQUES : 2006-2007

1. Variables aléatoires gaussiennes

1.1. Soit $I := \int_0^\infty e^{-x^2/2}dx$. Montrer que I est une intégrale convergente. Calculer I^2 en passant en coordonnées polaires. Que vaut I ? En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

1.2. *Loi gamma.* Pour tout $a, b > 0$, on appelle loi $\gamma(a, b)$ la loi de densité :

$$\frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} b^a e^{-bx} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

i) Calculer la transformée de Laplace de cette loi, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{a-1} b^a e^{-bx} dx.$$

Démontrer que l'espérance de cette loi vaut a/b et sa variance a/b^2.
ii) Vérifier que $\gamma(a, b) * \gamma(a', b) = \gamma(a + a', b)$. En déduire que :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a'-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a')}{\Gamma(a+a')}$$

iii) *injectivité de la transformée de Laplace* Soient ξ, η deux variables aléatoires positives. On suppose que, pour tout λ réel positif :

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda\xi}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda\eta}\right).$$

a) On note $\varphi(z) = \mathbb{E}(e^{z\xi})$ et $\psi(z) = \mathbb{E}(e^{z\eta})$. Montrer que φ et ψ sont bien définies, continues sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$ et holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$.
b) Montrer que φ et ψ coïncident sur $\mathbb{R}_-$. En déduire que ces fonctions coïncident sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$, et donc que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(e^{it\xi}\right) = \mathbb{E}\left(e^{it\eta}\right).$$

c) Montrer que ξ et η ont la même loi.
iv) *Loi de chi-deux.* Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendante gaussiennes standard. Montrer que :

$$Z := \sum_{j=1}^n X_j^2 \sim \gamma(n/2, 1/2).$$

(On dit que Z suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté.)

1.3. *Loi de chi-deux décentrée.* Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles gaussiennes, indépendantes, telles que $X_j \sim \mathcal{N}(m_j, 1)$.
i) Montrer que la fonction caractéristique de $Z := \sum_{j=1}^n X_j^2$ est :

$$\mathbb{E}(e^{itZ}) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}} \exp\left(\frac{itr}{1-2it}\right),$$

où $r := \sum_{j=1}^{n} m_j^2$. (On dit que Z suit une loi de χ^2 à décentrée n degrés de liberté, de paramètre de décentrage r, $\chi^2(n,r)$).
ii) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z)$.

1.4. *Loi beta.* Soient $a, b > 0$. Désignons par Z_a, Z_b deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\gamma(a,1)$, $\gamma(b,1)$.
i) Trouver la densité du vecteur aléatoire

$$(U,V) := \left(Z_a + Z_b, \frac{Z_a}{Z_a + Z_b}\right).$$

ii) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? (On dit que V suit une loi $\mathcal{B}(a,b)$.)

1.5. *Loi de Cauchy et loi d'arcsinus.*
i) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne standard. Montrer que la variable aléatoire $C = X/Y$ suit une loi de Cauchy.
ii) Soit V une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(1/2, 1/2)$ (loi d'arcsinus). Démontrer que la variable aléatoire $1/V$ a la même loi que la variable aléatoire $1 + C^2$, où C est de loi de Cauchy.

1.6. Soit $E \sim \gamma(1,1)$ et $V \sim \mathcal{B}(1/2, 1/2)$ deux variables indépendantes (E est de loi $\mathcal{E}(1)$). Montrer que :

$$2EV \sim G^2,$$

où G est une variable aléatoire gaussienne standard. On pourra observer que le relation précédente équivaut à : pour tout $a \geqslant 0$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2/2} dt = \mathbb{E}\left[\exp -\frac{a^2}{2V}\right].$$

1.7. *Loi de Fisher-Snedecor.* Soient $X \sim \gamma(a,b)$ et $Y \sim \gamma(c,d)$ deux variables aléatoires indépendantes.
i) Trouver la loi de la variable aléatoire X/Y.
ii) Supposons que $a = n/2$, $c = m/2$, $b = d = 1/2$. Trouver la loi de :

$$R := \frac{X/n}{Y/m}$$

(On dit que R suit une loi de Fisher-Snedecor à n et m degrés de liberté).
iii) Calculer $\mathbb{E}(R)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R)$ (discussion suivant les valeurs de n et m).

1.8. *Loi de Student.* Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$ deux variables aléatoires indépendantes.
i) Trouver la loi de la variable aléatoire :

$$T := \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

(On dit que T suit une loi de Student à n degrés de liberté).
ii) Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T)$.

1.9. On note par g_n la densité d'une variable aléatoire de loi $\chi^2(n)$:

$$g_n(x) := \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x \geqslant 0\}}.$$

i) Étudier la régularité de g_n à l'origine et le graphe de g_n.
ii) Pour quelle valeur de x, $g_n(x)$ est-elle maximum ?
iii) Étudier le comportement de ce maximum quand $n \uparrow \infty$.

1.10. *Approximation de la fonction de répartition de la loi gaussienne standard.* Soit

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

i) Vérifier que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2/2}(1 + 1/t^2) dt.$$

ii) En déduire, pour $x > 0$:

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

iii) Démontrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{3}{t^4} \right) dt.$$

En déduire que, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

iv) Démontrer que :

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \text{ lorsque } x \uparrow \infty.$$

1.11. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
i) Soit

$$S_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{n^{\alpha}}, \ 1/2 < \alpha \leqslant 1.$$

Montrer que S_n est une variable aléatoire gaussienne et calculer son espérance et sa variance.
ii) Utiliser l'exercice précédent pour majorer $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$.
iii) En déduire que $S_n \to 0$ p.s.

1.12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi.
i) Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes standard, alors $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
ii) *Théorème de Bernstein.* Réciproquement, on suppose que X et Y sont de carré intégrable

et que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. On veut montrer que X et Y sont deux variables gaussiennes. Pour cela :
a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées, de variance 1.
b) Montrer que φ, la fonction caractéristique commune de X et de Y, satisfait l'égalité $\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t)$. En déduire que φ ne s'annule nulle part.
c) On pose $\psi(t) := \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$ et que $\psi(t) = 1 + o(t^2)$, lorsque $t \downarrow 0$. En déduire que, pour tout t, $\psi(t) = 1$ et que $\varphi(t) = \varphi(t/2)^4$. Conclure.

1.13. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne standard et ε une autre variable aléatoire indépendante de X, prenant seulement les valeurs ± 1.
i) Montrer que $Y := \varepsilon X$ est une variable aléatoire réelle gaussienne standard.
ii) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
ii) La variable aléatoire $X + Y$ est-elle gaussienne ?

1.14. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne standard. Pour tout $a > 0$ on note :

$$Y_a := -X\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant a\}} + X\mathbb{1}_{\{|X|>a\}}.$$

i) Montrer que Y_a est une variable aléatoire réelle gaussienne standard.
ii) Démontrer que le couple (X, Y_a) n'est pas gaussien.
iii) Y-a-t il une valeur de a telle que la matrice de covariance de (X, Y_a) soit l'identité ?

1.15. Soit (X_1, X_2) un couple gaussien tel que :

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 0,\ \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2) = 1,\ \mathbb{E}(X_1X_2) = \rho.$$

i) Montrer que $|\rho| \leqslant 1$.
ii) Calculer la densité du couple (X_1, X_2).
iii) Retrouver, à partir du résultat de **ii)** les lois marginales de X_1 et X_2, ainsi que les quantités $\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \mathbb{E}(X_1^2), \mathbb{E}(X_2^2), \mathbb{E}(X_1X_2)$.
iv) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X_1 et X_2 soient indépendantes.
v) Que se passe-t-il quand $|\rho| = 1$?

1.16. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes, de même loi, centrées et de variance 1. On suppose que la variable aléatoire $(X + Y)/\sqrt{2}$ a la même loi que X et Y.
i) Soit $\varphi(t) := \mathbb{E}(e^{itX})$ la fonction caractéristique de X. Montrer que $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = -1$.
ii) Démontrer que, pour tout t, $\varphi^2(t/\sqrt{2}) = \varphi(t)$. En déduire que, pour tout t, $\varphi(t) \neq 0$.
iii) Montrer que, pour tout t et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\log \varphi(t)}{t^2} = \frac{\log \varphi(t/2^{n/2})}{(t/2^{n/2})^2}.$$

En déduire que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes standard.

1.17. *Loi de Rayleigh.* Soit (X, Y) un couple gaussien centré, de matrice de covariance égale à l'identité. Soit $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $Q = Y/X$. Montrer que R et Q sont deux variables aléatoires. Quelles sont les lois de R et Q ?

1.18. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f(x,y) := \lambda \exp\left[-\frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + y^2)\right].$$

i) Que vaut λ ? Trouver les lois marginales de X et de Y.
ii) Montrer que (X,Y) est un vecteur gaussien centré. Quelle est sa matrice de covariance ?
iii) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? non-corrélées ?

1.19. Soit (X,Y) un couple gaussien. On suppose que X et Y sont centrées, de variance 1 et on note par ρ le coefficient de corrélation du couple. Montrer que :

$$\mathbb{P}(XY > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\rho.$$

Calculer $\mathbb{P}(XY < 0)$. Soit $(X,Y,Z)^\star$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0, Z > 0)$.

1.20. Soit (X,Y) un couple gaussien. On suppose que X et Y sont centrées, de variance 1 et le coefficient de corrélation du couple vaut ρ. Montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\max\{X,Y\}\right] = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}.$$

Que vaut $\mathbb{E}\left[\max\{X,Y\}^2\right]$?

1.21. i) Montrer qu'il existe un triplet gaussien (X_1, X_2, X_3) tel que :

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = 0, \ \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2) = \mathbb{E}(X_3^2) = 1,$$

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1X_3) = \mathbb{E}(X_2X_3) = 1/2.$$

ii) Quelle est la loi de $X_1 - X_2 + 2X_3$?
iii) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(X_1 + aX_2, X_1 - X_2)$ est un couple gaussien. Existe-t-il un a tel que $(X_1 + aX_2$ et $X_1 - X_2)$ soient indépendantes ?
iv) Calculer la fonction caractéristique et la densité de (X_1, X_2, X_3).

1.22. *Théorème de Cochran.* Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^\star$ un vecteur gaussien centré de covariance identité. Soit A une matrice orthogonale $n \times n$. Définisons $Y := AX$.
i) Quelle est la loi de $\|Y\|^2 := \sum_{j=1}^n Y_j^2$?
ii) On considère une décomposition en somme directe orthogonale de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n = \oplus_{j=1}^p E_j$, E_j orthogonal à E_k pour $j \neq k$. Soit Π_{E_j} la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur E_j et on note $X_{E_j} := \Pi_{E_j}(X)$. Montrer que les variables aléatoires $X_{E_j}, j = 1, \ldots, p$, sont indépendantes et que $\|X_{E_j}\|^2$ suit une loi de χ^2 à r_j degrés de liberté, avec $r_j := \dim E_j$.

1.23. Soit X un vecteur gaussien de dimension n, centré, de matrice de covariance K (de type $n \times n$). Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $p \times n$. On définit $Y := AX$, $Z := BX$. Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si $AKB^* = 0$.

1.24. Soit X un vecteur gaussien de dimension n, centré, de matrice de covariance K inversible. Montrer que $X^* K^{-1} X \sim \chi^2(n)$.

1.25. Soit

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer qu'il existe un triplet gaussien (X, Y, Z), centré et de matrice de covariance K. Calculer la densité de ce triplet.
ii) Trouver la loi de $U := X + 2Y - Z$.
iii) Montrer que $Y^2/2 + Z^2/3 \sim \chi^2(2)$.
iv) Montrer que $(X + Y, Y - Z)$ est un couple gaussien. Calculer sa densité.

1.26. *Théorème de Lévy-Cramer.* Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X + Y$ soit une variable gaussienne. On veut alors montrer que X et Y sont des variables gaussiennes.
i) Soit ξ une variable aléatoire réelle telle que $h_\xi(u) := \mathbb{E}[e^{u\xi^2}] < \infty$, pour $u > 0$. On note $\psi_\xi(z) := \mathbb{E}[e^{z\xi}]$, $z \in \mathbb{C}$.
  a) Montrer que

$$|xz| \leqslant ux^2 + \frac{|z|^2}{u},\ u > 0,\ x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

  b) Montrer que ψ_ξ est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$).
  c) Si ψ_ξ ne s'annule pas et si $\ln |\psi(z)| \geqslant c + c'|z|^2$, pour deux constantes c, c', montrer que

$$\psi_\xi(z) = \exp\left(bz + \frac{az^2}{2}\right),\ b \in \mathbb{R},\ a \geqslant 0.$$

On utilisera le théorème de Liouville : *si f est entière telle que $|\mathrm{Re} f(z)| \leqslant c_1 + c_2|z|^2$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.*
  d) En déduire que ξ est une variable aléatoire gaussienne.
ii)
  a) On peut supposer que les médianes de X et Y sont nulles.
  b) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(|X+Y| > t) \geqslant \mathbb{P}(X > t, Y > 0) + \mathbb{P}(X < -t, Y < 0) + \mathbb{P}(|X| > t, Y = 0),$$

$$\mathbb{P}(X > t, Y > 0) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{P}(X > t, Y = 0),$$

$$\mathbb{P}(X < -t, Y < 0) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(X < -t) - \mathbb{P}(X < -t, Y = 0),$$

$$\mathbb{P}(|X+Y| > t) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X| \geqslant t).$$

c) Soit φ une fonction borélienne, positive et on note $\Phi(x) := a + \int_0^x \varphi(t)dt$, $x \geqslant 0$. Montrer que, pour toute variable aléatoire $\eta \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\Phi(\eta) = a + \int_0^\infty \varphi(t)\mathbb{P}(\eta > t)dt.$$

d) En déduire que, pour toute variable aléatoire ξ,

$$\mathbb{E}[e^{u\xi^2}] = 1 + 2u \int_0^\infty te^{ut^2}\mathbb{P}(|\xi| > t)\, dt.$$

e) En utilisant **ii.b)** et le point précédent, montrer que $h_X(u) \leqslant 2h_{X+Y}(u)$, $u > 0$.
f) En déduire qu'il existe $u_0 > 0$, tel que, pour $0 < u < u_0$, $h_X(u)$, $h_Y(u) < \infty$.
g) Démontrer le théorème de Lévy-Cramer.

1.27. Soit $X \sim \mathcal{N}_1(m, \sigma^2)$ telle que $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 0.8413$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 9) = 0.0228$. Calculer m et σ (on donne $\Phi(1) = 0.8413$ et $\Phi(2) = 0.9772$).

1.28. Un ordinateur sort les chiffres au hasard de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 32 & 22 & 23 & 31 & 21 & 23 & 28 & 25 & 18 & 27 \end{pmatrix}.$$

La machine fournit-elle des nombres équi-répartis (la table de $\chi^2(9)$ donne $\theta_{0.05} = 16.92$) ?

1.29. *Loi log-normale.* Soit X une variable aléatoire telle que $\ln X$ est une variable aléatoire gaussienne standard. Trouver la densité de X et calculer ses moments $\alpha_n := \mathbb{E}(X^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.30. On considère la fonction :

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\, x^3 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

et on note par g la densité gaussienne standard. On définit la fonction :

$$f(x, y) := g(x)\, g(y) + h(x)\, h(y).$$

Démontrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas gaussienne, mais que les densités marginales sont gaussiennes.

1.31. Soit $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leqslant 1$ et on note la fonction de répartition gaussienne réduite par :

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt = \int_{-\infty}^x g(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$$

i) Montrer que la fonction :

$$F(x, y) := \Phi(x)\, \Phi(y)\, [1 + a\, (1 - \Phi(x))\, (1 - \Phi(y)],\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est une fonction de répartition d'un couple aléatoire ayant les fonctions de répartition marginales $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$. Démontrer que, si $a \neq 0$, le couple n'est pas gaussien.
ii) Montrer que la fonction :

$$f(x,y) := g(x)\,g(y)[1 + a\,(2\Phi(x) - 1)\,(2\Phi(y) - 1)],\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

est une fonction de densité d'un couple aléatoire ayant les marginales $g(x)$ et $g(y)$. Démontrer que, si $a \neq 0$, le couple n'est pas gaussien.

1.32. *Promenade aléatoire dans* $\mathbb{R}$ *et vecteurs gaussiens.* Partant de l'origine, un individu choisit une direction (à droite ou à gauche) au hasard, puis il fait un pas de 1 mètre dans cette direction, et recommnece ainsi indéfiniment. On pose $S_0 = 0$ et soit S_k sa position après le k-ième pas. On note

$$X_k := S_k - S_{k-1}, \qquad Z_k := S_k/\sqrt{n},\ k, n \geqslant 1.$$

Montrer que, pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $Z_n^{(2)} := \big(Z_{[ns]}, Z_{[nt]}\big)$, converge en loi, quand $n \to \infty$ vers un vecteur gaussien centré $B^{(2)} := (B_s, B_t)$ de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Énoncer et démontrer un résultat pour des vecteurs de taille $r \geqslant 2$.

1.33. Soient $g_i(x,y)$ $i = 1, 2$ deux densités gaussiennes bidimensionnelles centrées de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_i \\ \rho_i & 1 \end{pmatrix},\ i = 1, 2.$$

On définit :

$$f(x,y) := c_1 g_1(x,y) + c_2 g_2(x,y)$$

où c_1, c_2 sont arbitraires $c_1, c_2 \geqslant 0$ et $c_1 + c_2 = 1$.
i) Montrer que f est la densité d'un couple (X,Y) et que, si $\rho_1 \neq \rho_2$, alors le couple n'est pas gaussien.
ii) Démontrer que les variables X et Y sont des gaussiennes standard avec le coefficient de corrélation $\rho := c_1\rho_1 + c_2\rho_2$.
iii) Les variables X et Y sont-elles non-corrélées ? indépendantes ?

1.34. Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x,y) := \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\left[\exp(-\frac{2}{3}(x^2 + xy + y^2)) + \exp(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2))\right],$$

où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
i) Montrer que le couple (X,Y) n'est pas gaussien.
ii) Montrer que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes standard.
iii) Les variables X et Y sont-elles non-corrélées ? indépendantes ?

1.35. Soient ξ_1 et ξ_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne standard. On considère les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) définis respectivement par :

$$X_1 := \xi_1 + \xi_2,\ X_2 := 2\xi_1 + \xi_2$$

et

$$Y_1 := \sqrt{2}\xi_1,\ Y_2 := (3/\sqrt{2})\xi_1 + (1/\sqrt{2})\xi_2.$$

i) Calculer les espérances et les matrices de covariance des deux couples (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2).
ii) Montrer que ces deux couples sont des couples gaussiens. Que peut-on remarquer ?

1.36. Soient ξ_1 et ξ_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne standard. On considère le vecteur aléatoire défini par :

$$(X, Y) := \begin{cases} (\xi_1, |\xi_2|), & \text{si } \xi_1 \geqslant 0 \\ (\xi_1, -|\xi_2|), & \text{si } \xi_1 < 0. \end{cases}$$

Montrer que le couple (X, Y) n'est pas gaussien, mais que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes.

1.37. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x, y) := \begin{cases} [1/(\pi(1-\rho^2)^{1/2})] \exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)], & \text{si } xy \geqslant 0 \\ 0, & \text{si } xy < 0, \end{cases}$$

où $|\rho| < 1$.
i) Montrer que f est une densité de probabilité, mais que le couple (X, Y) n'est pas gaussien.
ii) Montrer que X et Y sont des variables gaussiennes centrées réduites.

1.38. Soit ξ une variable aléatoire gaussienne réelle d'espérance m et de variance σ^2 et on note par g sa densité. On considère le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ de densité

$$f_n(x_1, \dots, x_n) := \left(\prod_{i=1}^{n} g(x_i)\right) \left(1 + \prod_{j=1}^{n} (x_j - m) g(x_j)\right),\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

i) Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} (x - m) g^2(x) dx.$$

ii) Montrer que f_n est une densité de probabilité.
iii) On choisit p, $2 \leqslant p \leqslant n-1$, composantes du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$, par exemple les premières $(X_1, \dots, X_p)$. Montrer que la densité f_p de $(X_1, \dots, X_p)$ satisfait :

$$f_p(x_1, \dots, x_p) = g(x_1) \dots g(x_p).$$

iv) En déduire que les variables $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes et gaussiennes.

1.39. Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien de moyenne et de matrice de covariance :

$$m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix};$$

(X, Y, Z) a-t-il une densité ? Quelle est la densité de (X, Y) ? Écrire Z en fonction de X et Y.

1.40. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de loi P_X tel que toutes ses coordonnées $X_1, \ldots, X_d$ sont des variables aléatoires rélles de carrés intégrables. Soit $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ la fonction caractéristique de X :

$$\Phi_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{i\langle t, X\rangle}\right] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x\rangle} \mathrm{P}_X(dx).$$

Montrer que Φ_X est une fonction deux fois continûment différentiable et on a les développements de Taylor à l'origine :

$$\Phi_X(t) = 1 + i\langle t, \mathbb{E}(X)\rangle - \frac{1}{2} t^\star \mathbb{E}(XX^\star) t + o(|t|^2)$$

et

$$\ln \Phi_X(t) = i\langle t, \mathbb{E}(X)\rangle - \frac{1}{2} t^\star K_X t + o(|t|^2),$$

où $K_X = \mathbb{E}(XX^\star) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}X)^\star$ est la matrice de covariance de X.

1.41. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^\star$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance l'identité. Soit H le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ engendré par $\{X_1, \ldots, X_n\}$, c'est-à-dire $Y \in H$ si et seulement si $\exists t \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = \langle t, X\rangle$. Pour tout Y et Y' de H on note $\langle Y, Y'\rangle_H = \mathbb{E}(YY') = \mathrm{Cov}(Y, Y')$.
i) Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle_H$ est un produit scalaire sur H.
ii) Soient Z et Z' éléments de H. Montrer que Z et Z' sont indépendantes si et seulement si $\langle Z, Z'\rangle_H = 0$.
iii) Soient $Y_1, \ldots, Y_p$ et $Z_1, \ldots, Z_r$, $p + r$ variables aléatoires appartenant à H. Montrer que $(Y_1, \ldots, Y_p)^\star$ et $(Z_1, \ldots, Z_r)^\star$ sont deux vecteurs aléatoires indépendants si et seulement si $H_y \subset H_z^\perp$ où H_y et H_z sont les sous-espaces vectoriels de H engendrés par $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$ et $\{Z_1, \ldots, Z_r\}$.
iv) On note $\overline{X} := (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Montrer que les variables $(X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})^\star$ et $\overline{X}$ sont indépendantes.
v) En déduire que les variables aléatoires $\overline{X}$ et $W = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j - \min_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j$ sont indépendantes.

1.42. Soit $\{X_n : n \geqslant 1\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants, de même loi, de carré intégrable et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. $\{\xi_n : n \geqslant 1\}$ désigne une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, bornées, équidistribuées. On suppose que la suite $\{X_n : n \geqslant 1\}$ est indépendante de la suite $\{\xi_n : n \geqslant 1\}$ et que X_1 ou ξ_1 est centrée. On note $Y_n = (\xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n)/\sqrt{n}$. Montrer que la suite $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$, vers une loi gaussienne que l'on caractérisera.

1.43. Un ordinateur effectue les calculs avec 9 chiffres après la virgule et arrondit tous les nombres à cette précision. On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires et que les erreurs d'arrondi commises à chaque opération sont indépendantes et de loi uniforme sur $[-10^{-9}/2, 10^{-9}/2]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises à chaque opération. Evaluer la probabilité pour que l'erreur finale soit en valeur absolue, inférieure à $10^{-6}/2$ (on donne $\int_0^{3^{1/2}} (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx = 0.45837$).