Master Mathématiques 1ère année

Probabilités et Modélisations Stochastiques : 2006-2007

2. Conditionnement

2.0. Soit N une v.a. à valeurs dans $\{0, ..., n\}$; on note $\alpha_k = \mathbb{P}(N = k)$. On considère $(\varepsilon_n ; n \geqslant 0)$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi : $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 0) = q$, avec $p + q = 1$, $p > 0$ et $q > 0$. On suppose que N est indépendante de la famille $(\varepsilon_n; n \geqslant 0)$. On définit alors la v.a. X par la relation : $X = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k$.
a) Calculer la loi de X. Exprimer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(N^2)$.
b) Soit $p' \in]0, 1[$. Déterminer la loi de N pour que la loi conditionelle de N sachant $X = 0$ soit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p')$.

2.1. Soit (X, Y) un couple gaussien centré et on note par $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X.
i) Prouver que :

$$\mathbb{E}\left[Y \mid \sigma(X)\right] = cX, \text{ où } c := \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

ii) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien centré et $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit $Y := \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ et $Z := \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$. Que vaut $\mathbb{E}\left[Z \mid \sigma(Y)\right]$?

2.2. i) Soient Y, Y' deux variables aléatoires réelles gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes. Montrer que, pour tous $t, s \geqslant 0$, les variables aléatoires :

$$e^{-t}\sqrt{1 - e^{-2s}}\, Y + \sqrt{1 - e^{-2t}}\, Y' \quad \text{et} \quad \sqrt{1 - e^{-2(t+s)}}\, Z$$

ont la même loi. Ici Z est une variable gaussienne centrée réduite.
ii) Soit, pour tout $t \geqslant 0$, l'opérateur T_t défini par :

$$T_t f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}\, y) e^{-y^2/2} dy.$$

Ici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit Y une variable gaussienne centrée réduite. Prouver que :

$$T_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}\, Y)\right].$$

iii) On note par ν la mesure gaussienne centrée réduite sur $\mathbb{R}$: $\nu(dx) := (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx$ et par $\mathrm{L}^p(\nu)$ l'espace $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Prouver que, pour $p = 1$ et $p = \infty$, T_t est, pour tout $t \geqslant 0$, un opérateur borné de $\mathrm{L}^p(\nu)$ dans $\mathrm{L}^p(\nu)$.
iv) Prouver que, pour tous t, $s \geqslant 0$, $T_t(T_s f) = T_{t+s} f$. (On dit que $\{T_t : t \geqslant 0\}$ est un semi-groupe d'opérateurs, le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.)
v) Prouver que, pour tout $t \geqslant 0$, et toutes fonctions f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées,

$$< T_t f, g >_\nu = < f, T_t g >_\nu, \text{ où } < f, g >_\nu := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \nu(dx).$$

vi) Soit (X, Y) un couple gaussien centré tel que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1$ et $\mathbb{E}(XY) = \rho \geqslant 0$. Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée :

$$\mathbb{E}\left[f(Y) \mid \sigma(X)\right] = T_t f(X), \text{ avec } \rho = e^{-t}.$$

Que se passe-t-il quand $\rho = 0$ ou $\rho = 1$? Qu'obtient-on dans le cas particulier où $f(x) = x$?
vii) Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes. On pose $Y_1 = X_1$ et

$$Y_2 = Y_1 e^{-t} + \sqrt{1 - e^{-2t}}\, X_2,\; Y_3 = Y_2 e^{-s} + \sqrt{1 - e^{-2s}}\, X_3.$$

Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée, on a :

$$\mathbb{E}\left[f(Y_3) \mid \sigma(Y_1)\right] = T_{t+s} f(Y_1).$$

Calculer

$$\mathbb{E}\left[f(Y_3) \mid \sigma(Y_1, Y_2)\right].$$

En déduire le résultat du point **iv)**, pour tous t, $s \geqslant 0$, $T_t(T_s f) = T_{t+s} f$.

2.3. Soit (X, Y, Z) un triplet gaussien centré.
i) Si on suppose seulement que X et Y sont indépendantes, montrer que :

$$\mathbb{E}\left[Z \mid \sigma(X, Y)\right] = \mathbb{E}\left[Z \mid \sigma(X)\right] + \mathbb{E}\left[Z \mid \sigma(Y)\right].$$

ii) On suppose que la matrice de covariance vaut

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho_1 \\ 0 & 1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que l'on a $\rho_1^2 + \rho_2^2 \leqslant 1$.
b) Soit (X', Y', Z') un triplet gaussien centré de matrice de covariance égale à l'identité. Définissons :

$$\bar{X} := X',\; \bar{Y} := Y',\; \bar{Z} := \rho_1 X' + \rho_2 Y' + \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}\, Z'.$$

Prouver que $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ un triplet gaussien de même loi que (X, Y, Z).
iii) Si la matrice de covariance est l'identité, quelle est la loi de

$$\frac{(X + YZ)}{\sqrt{1 + Z^2}} ?$$

2.4. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Soient, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x) := \mathbb{E}[f(x, Y)]$ et $h(y) := \mathbb{E}[f(X, y)]$.
i) On suppose que X, Y sont indépendantes.
a) Lorsque f est positive, montrer que

$$\mathbb{E}\left[f(X, Y)\right] = \mathbb{E}\left[g(X)\right] = \mathbb{E}\left[h(Y)\right].$$

b) Lorsque X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, montrer que

$$F_{X+Y}(t) = \int_0^1 F_Y(t - u)\, du,\; t \in \mathbb{R}.$$

ii) On suppose toujours que X, Y sont indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[f(X, Y) \mid \sigma(X)\right] = g(X) \text{ et } \mathbb{E}\left[f(X, Y) \mid \sigma(Y)\right] = h(Y).$$

iii) Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On ne suppose plus l'indépendance de X et Y, mais que X est $\mathcal{B}$-mesurable et que Y est indépendante de $\mathcal{B}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[f(X,Y) \mid \mathcal{B}\right] = g(X).$$

Énoncer les hypothèses et un résultat similaire pour $h(Y)$.

2.5. Soient X, Y deux variables aléatoires positives, indépendantes, de même loi. On pose $U := \min\{X,Y\}$ et $V := \max\{X,Y\}$. Calculer $\mathbb{E}\left[U \mid \sigma(V)\right]$ lorsque :
i) la loi commune est la loi exponentielle de paramètre λ ;
ii) la loi commune est la loi uniforme sur $[0,1]$.

2.6. Soit ε une variable aléatoire prenant seulement les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que ε est indépendante de $\mathcal{B}$ si et seulement si $\mathbb{E}\left[\varepsilon \mid \mathcal{B}\right] = 0$.

2.7. i) Soit Y une variable aléatoire ayant la densité $f_Y(y) := y^{-2}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(y)$ et soit $X = Y$. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \infty$, mais que $\mathbb{E}\left[Y \mid \sigma(X)\right] < \infty$ p.s.
ii) Même question pour le couple aléatoire (X,Y) ayant la loi jointe donnée par $p_{ij} := [i(i+1)]^{-1}$, pour $i = j = 1, 2, \ldots$.

2.8. Soient $n \geqslant 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réls positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note :

$$p_{ij} = \begin{cases} n!\,\frac{p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{i!j!(n-i-j)!}, & \text{si } i+j \leqslant n \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

i) Montrer qu'il existe un couple (X,Y) tel que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$.
ii) Trouver les lois de X et de Y ainsi que celle de Y sachant X.
iii) Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

2.9. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi de Poisson de paramètre y.
i) Calculer les lois du couple (X,Y), de X, ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant X.
ii) Montrer que $\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = 1$, en conditionnant d'abord par rapport à Y et ensuite par rapport à X.

2.10. i) Montrer que la fonction $f(x,y) = 2\mathbb{1}_{\{x,y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}}$ est une densité de probabilité d'un couple (X,Y).
ii) Trouver les lois marginales, ainsi que la loi conditionnelle de X sachant Y.
iii) En déduire que la variable aléatoire $X/(1-Y)$ est indépendante de Y et suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

2.11. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$, a la densité $(\alpha/2)e^{-\alpha|y|}$, où $\alpha := (1+x^2)/2$.
i) Trouver la densité de (X,Y) et celle de Y.
ii) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et que ceux impairs sont nuls.
iii) Vérifier que la loi de Y est symétrique et trouver la fonction de répartition de $|Y|$.

2.12. Trouver la loi conditionnelle et l'espérance conditionnelle de Y sachant X, lorsque la densité du couple (X,Y) est donnée par :
i) $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant y\}}$.
ii) $f(x,y) = x\, e^{-x(y+1)} \mathbb{1}_{\{x,y \geqslant 0\}}$.
ii) $f(x,y) = (x/\sqrt{2\pi}) \exp(-x(y-x)/2) \mathbb{1}_{\{x,y>0\}}$.
iv) $f(x,y) = 4x(y-x)\exp(-(x+y)) \mathbb{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant y\}}$.

2.13. Soit (X,Y) un couple gaussien tel que $\mathbb{E}(X) = m_x$, $\mathbb{E}(Y) = m_y$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_x^2$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_y^2$ et $\rho(X,Y) = \rho$.
i) Montrer que : $\mathbb{E}\left[X \mid \sigma(Y)\right] = m_x + \rho\sigma_x(Y - m_y)/\sigma_y$.
ii) On définit la variance conditionnelle :

$$\mathrm{Var}\left[X \mid \sigma(Y)\right] := \mathbb{E}\left[\{X - \mathbb{E}\left[X \mid \sigma(Y)\right]\}^2 \mid \sigma(Y)\right].$$

Alors $\mathrm{Var}\left[X \mid \sigma(Y)\right] = \sigma_x^2(1-\rho^2)$.
iii) On suppose que $m_x = m_y = 1$, $\sigma_x^2 = 2$, $\sigma_y^2 = 1$ et que $\rho = -1/\sqrt{2}$. Faire le calcul de la loi conditionnelle de Y sachant X.
iv) On suppose que $m_x = m_y = 0$ et que $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\left[X^2 \mid Y^2 = y^2\right] = \frac{1}{2}\left\{\mathbb{E}\left[X^2 \mid Y = y\right] + \mathbb{E}\left[X^2 \mid Y = -y\right]\right\} = 1 + \rho^2(y^2 - 1).$$

2.14. Une variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Si $X_1 = x_1$, alors X_2 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_1, x_1+1]$. Si $X_2 = x_2$, alors X_3 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_2, x_2+1]$. Les variables aléatoires $X_4, \dots, X_n$ sont définies de la même manière pour tous $n \geqslant 4$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

2.15. Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Définissons les variables aléatoires :

$$X(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{si } \omega \in]\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad Y(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in [0, \frac{3}{4}[\\ 0, & \text{si } \omega \in]\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$Z(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0, & \text{si } \omega \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]. \end{cases}$$

Montrer que $\mathbb{E}[X \mid \sigma(Z)] = \mathbb{E}(X)$ p.s., mais que $\mathbb{E}\left[X \mid \sigma(Y,Z)\right] \neq \mathbb{E}\left[X \mid \sigma(Y)\right]$.

2.16. Soit Z une variable aléatoire dont la loi est symétrique par rapport à zéro et soit X une variable aléatoire indépendante de Z et telle que $X \geqslant 1$ p.s. On note $Y := Z/X$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}[Y \mid \sigma(X)]$. Montrer que $\mathbb{E}[Y \mid \sigma(X)] = \mathbb{E}(Y)$ p.s., mais que X et Y sont dépendantes.

* * *

2.17. Soient X, Y deux variables aléatoires de carré intégrable et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de l'espace des événements $\mathcal{A}$. Montrer que : $\mathbb{E}\left\{X\, \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{B}\right]\right\} = \mathbb{E}\left\{Y\, \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}\right]\right\}$.

2.18. Soient $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$, A un événement et X une variable aléatoire

intégrable.
i) Montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}_2)\right] \mid \mathcal{B}_1\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}_1)\right] \text{ et } \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}_1)\right] \mid \mathcal{B}_2\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}_1)\right].$$

ii) Soit $\Omega = a, b, c$. Donner un exemple pour lequel

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}_2)\right] \mid \mathcal{B}_1\right] \neq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}_1)\right] \mid \mathcal{B}_2\right].$$

iii) Montrer que : $\mathbb{E}\left[\mathbb{P}(A \mid \mathcal{B}_2) \mid \mathcal{B}_1\right] = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{B}_1)$ p.s.

2.19. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de carré intégrable. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, on définit

$$\mathrm{Var}\left[X \mid \mathcal{B}\right] := \mathbb{E}\left[\left\{X - \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}\right]\right\}^2 \mid \mathcal{B}\right].$$

Montrer que : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left\{\mathrm{Var}\left[X \mid B\right]\right\} + \mathrm{Var}\left\{\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}\right]\right\}$.

2.20. Soit $\{X_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.
i) *(convergence monotone)* On suppose que $X_1 \geqslant 0$ p.s., que pour tout $n \geqslant 1$, $X_{n+1} \geqslant X_n$ p.s. et que X_n est intégrable. Montrer que si $\lim_{n\uparrow\infty} X_n$ est intégrable, alors :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{B}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\uparrow\infty} X_n \mid \mathcal{B}\right], \text{ p.s.}$$

ii) *(lemme de Fatou)* On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \geqslant 0$ p.s. et que X_n est intégrable. Montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\uparrow\infty} X_n \mid \mathcal{B}\right] \leqslant \liminf_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{B}\right], \text{ p.s.}$$

Lorsqu'on suppose que $X_n \leqslant Z$ p.s. pour une certaine variable aléatoire Z intégrable, montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\limsup_{n\uparrow\infty} X_n \mid \mathcal{B}\right] \geqslant \limsup_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{B}\right], \text{ p.s.}$$

iii) *(convergence dominée)* On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, X_n est intégrable et que $|X_n| \leqslant Z$ pour une certaine variable aléatoire Z intégrable. De plus on suppose qu'il existe une autre variable aléatoire X_∞ telle que $X_n \to X_\infty$ p.s. Montrer que :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{B}\right] = \mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{B}\right], \text{ p.s.}$$

iv) On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \geqslant 0$ p.s. et que X_n est intégrable. Montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\geqslant 1} X_n \mid \mathcal{B}\right] = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{B}\right], \text{ p.s.}$$

2.21. *Inégalité de Jensen.* Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ intégrable et soit $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une

fonction convexe telle que la variable aléatoire $\varphi(X)$ soit intégrable.
i) Dire pourquoi $\varphi(X)$ est une variable aléatoire.
ii) On suppose dans ce point seulement que X prend les valeurs réelles x et y avec les probabilités $\lambda \in]0,1[$ et $1-\lambda$. Majorer $\varphi(\mathbb{E}(X))$.
iii) On rappelle qu'une fonction réelle convexe admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point. On note $\delta(x)$ la dérivée à droite de φ en $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \delta(x)(y-x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

iv) Appliquer cette inégalité aux réels $y = X(\omega)$ et $x = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}\right](\omega) =: Y(\omega)$.
v) Supposons d'abord que toutes les variables aléatoires de l'inegalité précédente sont bornées. Appliquer $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{B})$ et déduire l'inégalité de Jensen :

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}\right]\right) \leqslant \mathbb{E}\left[\varphi(X) \mid \mathcal{B}\right].$$

vi) On ne suppose plus que les variables sont bornées. Remplacer la variable X par $X_n = X\mathbb{1}_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| \leqslant n\}}$ et vérifier l'inégalité de Jensen pour X_n. Laisser ensuite n tendre vers l'infini et conclure.
vii) Que devient cette inégalité pour $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$?
viii) Soit $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}\left[\cdot \mid \mathcal{B}\right]$ est un opérateur de contraction sur $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Précisement, si X est p-intégrable et si on note la norme $\|X\|_p := (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$, alors

$$\|\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}\right]\|_p \leqslant \|X\|_p.$$

On pourra appliquer l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $\varphi(x) = |x|^p$.
ix) Soit $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que si $\{X_n : n \geqslant 1\}$ est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \to X_\infty$ dans L^p alors

$$\mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{B}\right] \to \mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{B}\right] \ \text{ dans } \mathrm{L}^p.$$

2.22. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$, indépendantes. Soit X une variable aléatoire réelles définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est indépendante de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{D}$ la tribu engendrée par $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Montrer que $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{D}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{B}\right]$.

2.23. Soient X, $Y \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que

$$\mathbb{E}\left[X \mid \sigma(Y)\right] = Y, \ \text{ et } \ \mathbb{E}\left[Y \mid \sigma(X)\right] = X.$$

Montrer que $X = Y$ p.s. On pourra observer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{\{Y \leqslant x < X\}}\right] = \mathbb{E}\left[(Y-X)\mathbb{1}_{\{x<X\}\cap\{x<Y\}}\right].$$

2.24. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathcal{H}$ si

$$\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{H}\right] \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{H}\right],$$

pour toutes les variables aléatoires X, Y bornées, avec $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ et $\sigma(Y) \subset \mathcal{G}$. On va montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soient indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathcal{H}$ est

$$\mathcal{H} \supset \sigma \left\{ \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F} \right] : Y \text{ bornée, } \mathcal{G}\text{-mesurable} \right\}.$$

i) Pour montrer que la condition est suffisante on pourra vérifier d'abord que

$$\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{H} \right] = \mathbb{E}\left[X\, \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F} \right] \mid \mathcal{H} \right].$$

ii) Pour montrer que la condition est nécessaire il suffit de prouver que, pour toute variable aléatoire Y bornée, $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{H} \right] = \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F} \right].$$

Pour cela on pourra vérifier d'abord que

$$\mathbb{E}\left\{ \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{H} \right] \, \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F} \right] \right\} = \mathbb{E}\left\{ \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{H} \right]^2 \right\} = \mathbb{E}\left\{ \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F} \right]^2 \right\}.$$

Conclure par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.25. *Indépendance et (in)dépendance conditionnellement à une tribu*
i) Soit (X, Y, Z) un triplet aléatoire discret dont la loi est donée par :

$$\mathbb{P}(X = k, Y = m, Z = n) := p^3(1-p)^{m-3},$$

où $0 < p < 1$, $k = 1, \ldots, m-1$, $m = 2, \ldots, n-1$, $n = 3, 4, \ldots$.
a) Trouver lois des couples (X, Y), (X, Z) et (Y, Z) et ensuite les marginales X, Y et Z. Montrer que X et Z sont dépendantes.
b) Calculer $\mathbb{P}(Z = n \mid X = k, Y = m)$, $k = 1, \ldots, m-1$, $m = 2, \ldots, n-1$. En déduire, $\mathbb{E}\left[Z \mid X = k, Y = m\right]$, pour $k = 1, \ldots, m-1$, $m = 2, 3, \ldots$ et ensuite $\mathbb{E}\left[Z \mid \sigma(X, Y)\right]$.
c) Par un calcul similaire à celui du point précédent exprimer, pour toute fonction mesurable et bornée g, $\mathbb{E}\left[g(Z) \mid \sigma(X, Y)\right]$. Montrer que cette quantité ne dépend pas de X.
d) En déduire que Z est indépendante de X, conditionnelement à la tribu $\sigma(Y)$, bien que Z et X sont dépendantes.
ii) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On note $Z := \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}}$.
a) Calculer $\mathbb{E}[X \mid \sigma(Z)]$ et $\mathbb{E}[Y \mid \sigma(Z)]$.
b) Montrer que les variables aléatoires X et Y sont dépendantes conditionnelement à la tribu $\sigma(Z)$.
iii) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note $S := X_1 + \ldots + X_n$.
a) Trouver la loi conditionnelle de X_1 sachant S et calculer ensuite $\mathbb{E}[X_1 \mid \sigma(S)]$.
b) Montrer que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont dépendantes conditionnelement à la tribu $\sigma(S)$.
c) Calculer $\mathbb{E}[X_1^2 \mid \sigma(S)]$ et $\mathbb{E}[X_1 X_2 \mid \sigma(S)]$.
iv) Donner un exemple de deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telles que X et Y ne sont pas indépendantes, alors que $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$.

2.26. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle positive ou nulle. Pour A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$ on dit que $A_1 > A_2$ si $\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2) = 0$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $A := \{X > 0\}$, $B := \{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] > 0\}$ et $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{B} : C > A\}$. Montrer que B est le plus petit élément de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire : $B \in \mathcal{C}$ et $\forall C \in \mathcal{C}$, $C > B$.

2.27. Soient p, $q > 1$ deux réels conjugués, c'est-à-dire $1/p + 1/q = 1$.
i) Montrer que, pour tous x, $y \geqslant 0$, $xy \leqslant x^p/p + y^q/q$.
ii) Soit $X \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $Y \in \mathrm{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, on note

$$B := \{\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{B}] > 0\} \cap \{\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{B}] > 0\}.$$

Montrer que, sur B :

$$\frac{|XY|}{(\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{B}])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{B}])^{1/q}} \leqslant \frac{|X|^p}{p\,\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{B}]} + \frac{|Y|^q}{q\,\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{B}]}.$$

En déduire que, sur B :

$$\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{B}] \leqslant (\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{B}])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{B}])^{1/q}.$$

iii) Soit $B_X := \{\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{B}] = 0\}$. Montrer que, sur B_X, X est nulle.
iv) En déduire l'*inégalité de Hölder* :

$$\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{B}] \leqslant (\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{B}])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{B}])^{1/q}.$$

v) *(inégalité de Markov)* Montrer que si $a > 0$, alors

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a \mid \mathcal{B}) \leqslant \frac{\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{B}]}{a^p}.$$

2.28. Soient X, Y deux variables aléatoires. On suppose que $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[Y \mid X]$ est presque sûrement constante si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[Y \exp(itX)] = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}[\exp(itX)].$$

* * *

2.29. Soit $\{X_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $n \geqslant 1$.
i) On suppose les variables X_n intégrables. Montrer que :

$$\left\{Y_n - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) : n \geqslant 1\right\}$$

est une martingale.
ii) On suppose que les variables X_n sont centrées et de carré intégrable. Montrer que :

$$\left\{Y_n^2 - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j^2) : n \geqslant 1\right\}$$

est une martingale.

2.30. Soit $\{X_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $\varphi(u) := \mathbb{E}[\exp iuX_1]$ la fonction caractéristique de la loi comune. Si $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, montrer que :

$$\left\{\frac{\exp iuS_n}{\varphi(u)^n} : n \geqslant 1\right\}$$

est une martingale (complexe).

2.31. Soit $\{X_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(X_n) = m_n \neq 0$, $n \geqslant 1$ et $X_n \in \mathrm{L}^p$, $\forall p$. Montrer que :

$$\left\{Y_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{X_j}{m_j} : n \geqslant 1\right\}$$

est une martingale.

2.32. Soit $\{X_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1-p$, $n \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on introduit :

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j,\ Y_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \text{ et } Z_n := \frac{\cos\{\lambda[S_n - c]\}}{(\cos\lambda)^n},\ c \in \mathbb{R}.$$

i) Montrer que Y est une martingale.
ii) Montrer que Z est une martingale si $\cos\lambda \neq 0$ et si $p = q$.

2.33. Soit ξ une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\xi = n) = p^n(1-p)$, $n \geqslant 0$. Soit, pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\xi \wedge (n+1)$.
i) Montrer que :

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left\{\{\xi = 0\}, \{\xi = 1\}, \ldots, \{\xi = n\}, \{\xi \geqslant n+1\}\right\}.$$

ii) Montrer que :

$$X_n := \mathbb{1}_{\{\xi \leqslant n\}} - (1-p)(\xi \wedge n) \text{ et } Y_n := X_n^2 - p(1-p)(\xi \wedge n),\ n \geqslant 0,$$

sont deux martingales.

2.34. i) Soit $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ une filtration, T un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_T$. On pose :

$$T_A := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ \infty & \text{sur } A^c. \end{cases}$$

Montrer que T_A est un temps d'arrêt.
ii) Si S est un temps d'arrêt tel que $T \leqslant S$, soit :

$$U := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ S & \text{sur } A^c. \end{cases}$$

Montrer que U est un temps d'arrêt.
iii) Soit $\{M_n : n \geqslant 0\}$ une suite de variables aléatoires telles que, $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$, pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que M est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$, pour tout temps d'arrêt borné τ. Pour établir une partie, on pourra considérer des temps d'arrêt U avec $T \equiv n$, $A \in \mathcal{F}_n$ et $S \equiv n+1$.

2.35. Soit T un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\phi(n) := \inf\{k \geqslant 0 : \{T = n\} \in \mathcal{F}_k\}.$$

Prouver que $\phi(T)$ est un temps d'arrêt, majoré par T.

2.36. Soit $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - 2^{-n},\ \mathbb{P}(Y_n = 2^n - 1) = 2^{-n}.$$

Soit :

$$T := \inf\{n \geqslant 1 : Y_n \neq -1\}, \text{ et } X_n := \sum_{j=1}^{n} (-1)^j Y_j \mathbb{1}_{\{j \leqslant T\}},\ n \geqslant 1.$$

i) Montrer que X est une martingale.
ii) Prouver que $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$.
iii) Soit $X^* := \sup_{n \geqslant 1} |X_n|$. Prouver que X^* est presque sûrement fini et que, sur $T = \infty$, $X_{2n-1} = 1$ et $X_{2n} = 0$, pour tout $n \geqslant 1$ et que p.s. X_n ne converge pas.

2.37. Soit $\{X_n : n \geqslant 0\}$ une suite de variables aléatoires. On note :

$$\bar{X}_n := \sup_{0 \leqslant j \leqslant n} X_j,\ \underline{X}_n := \inf_{0 \leqslant j \leqslant n} X_j,\ X_n^* := \sup_{0 \leqslant j \leqslant n} |X_j|.$$

i) On suppose que X est une sur-martingale, c'est-à-dire $X_n \in \mathrm{L}^1$, pour tout n, et $\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leqslant X_n$. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que :

$$x\mathbb{P}(\bar{X}_n \geqslant x) \leqslant \mathbb{E}[X_0] - \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{\bar{X}_n \leqslant x\}}],$$

$$x\mathbb{P}(\underline{X}_n \leqslant -x) \leqslant -\mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{\underline{X}_n \leqslant -x\}}\right] \leqslant \mathbb{E}(|X_n|).$$

On pourra introduire les temps d'arrêt $\tau := \inf\{k \geqslant 0 : X_k \geqslant x\} \wedge n$ et $\sigma := \inf\{k \geqslant 0 : X_k \leqslant -x\} \wedge n$.
ii) Montrer que si X est une sur-martingale positive, on a :

$$x\mathbb{P}(\bar{X}_\infty \geqslant x) \leqslant \mathbb{E}(X_0),\ \forall x \geqslant 0.$$

En particulier, $\bar{X}_\infty$ est une variable aléatoire finie p.s.
iii) *Inégalité de Doob.* On suppose maintenant que X est une sous-martingale (c'est-à-dire que $-X$ est une sur-martingale) positive. Soit $p > 1$ et q son conjugué : $1/p + 1/q = 1$. Montrer que :

$$x\mathbb{P}(\bar{X}_n \geqslant x) \leqslant \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{\bar{X}_n \geqslant x\}}\right],\ x \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$

Établir

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}_n^p\right] \leqslant \frac{p}{p-1}\, \mathbb{E}\left[X_n \bar{X}_n^{p-1}\right].$$

On pourra multiplier l'inégalité précédente par x^{p-2}, puis intégrer. Enfin, utiliser l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}_n^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[X_n^p\right], \, n \geqslant 0.$$

2.38. Soit $\{\varepsilon_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi :

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = p, \, \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = q, \text{ avec } p, \, q > 0, \, p + q = 1.$$

On pose $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et, pour $a \in \mathbb{Z}$:

$$\tau_a := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = a\}, \, (\inf \emptyset = +\infty).$$

i) Montrer que τ_a est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$
ii) Soit $0 < u < 1$, $b > 0$ et $X_n := u^n b^{S_n}$. Montrer que $\{X_n : n \geqslant 0\}$ est une martingale, si $1 = u(pb + q/b)$.
iii) Prouver que :

$$\mathbb{E}\left[u^{\tau_a} \mathbb{1}_{\{\tau_a < \infty\}}\right] = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqu^2}}{2qu}\right)^a$$

et que :

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = \inf\{1, (p/q)^a\}, \text{ pour } a \in \mathbb{N}.$$

Que se passe-t-il pour a négatif ?
iv) On suppose $p < q$ et $a \in \mathbb{N}$. Vérifier que

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \infty) = 1, \, \mathbb{P}(\tau_a < \infty) = (p/q)^a.$$

Retrouver ce résultat en utilisant la loi des grands nombres. Prouver que $1 + \bar{S}_\infty$ suit une loi géométrique, où $\bar{S}_\infty := \sup_{n \geqslant 0} S_n$.
v) On suppose maintenant $p = q = 1/2$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\tau_a < \infty$ p.s. Vérifier que

$$\{S_{n+\tau_a} - a : n \geqslant 0\} \text{ a la même loi que } \{S_n : n \geqslant 0\}.$$

Enfin, prouver que $\limsup_{n\uparrow\infty} S_n = +\infty$, $\liminf_{n\uparrow\infty} S_n = -\infty$, p.s.

2.39. Soit $\{X_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X_n := \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } (2n)^{-1} \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - n^{-1} \\ -1 & \text{avec probabilité } (2n)^{-1}. \end{cases}$$

Soit $Y_1 = X_1$ et pour $n \geqslant 2$:

$$Y_n := \begin{cases} X_n, & \text{si } Y_{n-1} = 0 \\ nY_{n-1}|X_n|, & \text{si } Y_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

i) Montrer que Y est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.
ii) Montrer que $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ ne converge pas presque sûrement. Cette suite converge-t-elle ?
iii) Pourquoi le théorème de convergence des martingales ne s'applique pas ?

2.40. Soit X une martingale telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j > x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\mathbb{E}(X_n^2) + x^2},\ x > 0.$$

2.41. Soit $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma > 0$. On pose $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $X_n := \sum_{i=1}^n Y_i$. On pose aussi, pour $u \in \mathbb{R}^*$,

$$Z_n^u = \exp\left(uX_n - \frac{1}{2} n\, u^2 \sigma^2\right).$$

i) Montrer que $\{Z_n^u ; n \geqslant 1\}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale pour tout $u \in \mathbb{R}^*$.
ii) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, $\{Z_n^u ; n \geqslant 1\}$ converge presque sûrement.
iii) Montrer que

$$K_n := \frac{1}{n}\left(uX_n - \frac{1}{2} n\, u^2 \sigma^2\right),\ n \geqslant 1$$

converge presque sûrement, et déterminer sa limite.
iv) Trouver la limite presque sûre de $\{Z_n^u : n \geqslant 1\}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.
v) Trouver $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n^u]$. La martingale $\{Z_n^u : n \geqslant 1\}$ converge-t-elle dans L^1 ?

2.42. A l'instant 1, une urne contient une boule verte et une boule bleue. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur que celle tirée, ce qui donne une nouvelle composition de l'urne à l'instant 2. On répète alors le procédé pour les instants successifs. On note Y_n le nombre de boules vertes dans l'urne à l'instant n, et $X_n = \frac{Y_n}{n+1}$ la proportion de boules vertes à cet instant. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.
i) Montrer que $\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (Y_n + 1)X_n + Y_n(1 - X_n)$.
ii) Montrer que $\{X_n ; n \geqslant 1\}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire U.
iii) En appliquant le théorème de la convergence dominée, montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $\lim_{n\to\infty} E[X_n^k] = E[U^k]$.
On fixe $k \geqslant 1$. On pose alors, pour $n \geqslant 1$,

$$Z_n := \frac{Y_n(Y_n + 1) \ldots (Y_n + k - 1)}{(n+1)(n+2) \ldots (n+k)}.$$

En introduisant les variables aléatoires $\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} = Y_n\}}$ et $\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} = Y_n + 1\}}$, montrer que $\{Z_n ; n \geqslant 1\}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
iv) Exprimer la limite presque sûre de Z_n en fonction de la variable aléatoire U.
v) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$. Montrer que ces moments sont ceux d'une loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

2.43. Soit une série d'expériences indépendantes, chacune d'entre elles produisant un succès avec probabilité p, un échec avec probabilité q, $p + q = 1$. Soit X_1 (resp. S) le numéro de la première (resp. de la deuxième) tentative qui se solde par un succès, et posons $X_2 = S - X_1$.
i) Indiquer la loi de X_1, la loi du couple (X_1, X_2) et calculer $\mathbb{P}(X_1 = \ell | S = k)$.
ii) Calculer $\mathbb{E}[X_1 | S = k]$ à l'aide de la formule : $\mathbb{E}[X_1 | S = k] = \sum_\ell \ell \mathbb{P}(X_1 = \ell | S = k)$.
iii) Pour des variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et de même loi *quelconque* (discrètes ou non), mais soit positives, soit intégrables, calculer $\mathbb{E}[X_1 | X_1 + X_2]$ et $\mathbb{E}[X_1 + X_2 | X_1]$.

2.44. On se donne une famille $(X_{k,\ell})_{k,\ell\geqslant 1}$ de variables de Bernoulli de paramètre p, indépendantes, et on considère une population d'individus qui évolue suivant la règle suivante : la première génération est constituée d'un seul individu, l'ancêtre. Le l-ème individu de la k-ème génération vit une unité de temps puis meurt en donnant naissance à $Y_{k,\ell} = 2X_{k,\ell}$ individus, qui, eux, appartiennent à la $(k+1)$-ème génération. L'effectif de la k-ème génération est noté Z_k (par conséquent, $Z_1 = 1$).
i) Calculer $\mathbb{E}[Y_{k,\ell}]$, ainsi que $\mathbb{P}\left(\frac{Z_k}{2} = j \mid Z_{k-1} = i\right)$.
ii) Calculer $\mathbb{E}\left[Z_k | Z_{k-1}\right]$ puis $\mathbb{E}\left[Z_k\right]$.
iii) Montrer que si $2p < 1$, avec probabilité 1 la population finit par s'éteindre en un temps fini.

2.45. **i)** On se livre à une suite d'expériences indépendantes, dont les résultats $(E_k)_{k\geqslant 1}$ sont de deux types, par exemple "échec" ou "succès", avec probabilité p (resp. q), $p+q=1$. On note N l'indice de la première expérience conduisant à un succès. Rappeler la loi de N et son espérance.
ii) On se donne une suite de variables aléatoires réelles indépendantes $(X_k)_{k\geqslant 0}$, de même densité f, densité supposée strictement positive sur $\mathbb{R}$. On note F la fonction de répartition associée à f. On note T le premier indice $k \geqslant 1$ tel que $X_k > X_0$. Quelle est la loi conditionnelle de T sachant que $X_0 = x$? Calculer $\mathbb{E}\left[T \mid X_0\right]$.
iii) Calculer, directement et également à l'aide de la question précédente, la loi de T et son espérance.

2.46. On suppose que le nombre $N_{a,b}$ d'instructions arrivant au microprocesseur d'un ordinateur pendant l'intervalle de temps $[a,b]$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(b-a)$.
i) Calculer $\mathbb{E}(N_{a,b})$.
ii) On note X_k (respectivement D_k) le temps utilisé par le microprocesseur pour exécuter la k-ème instruction (respectivement le moment où le microprocesseur commence à exécuter cette k-ème instruction). On note A_k le nombre d'instruction arrivées dans la file d'attente pendant l'exécution de la k-ème instruction. Quelle est la loi conditionnelle de A_k sachant $(X_k, D_k) = (x,d)$? sachant $X_k = x$? En supposant que X_k a pour densité f, calculer $\mathbb{P}(A_k = \ell)$.
iii) On suppose que X_k suit la loi exponentielle de paramètre μ. Calculer $\mathbb{E}(X_k)$, $\mathbb{P}(A_k = \ell)$, $\mathbb{E}(A_k)$. Quelle condition faut-il imposer aux paramètres pour que l'ordinateur fonctionne correctement ?