Feuille d'exercices # 1 : Conditionnement

Exercice 1 *Mesurabilité*
Soient Z et X deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que Z est $\sigma(X)-$mesurable si et seulement s'il existe une fonction borélienne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Z = h(X)$.

Exercice 2 *Inégalité de Cauchy–Schwarz version conditionnelle*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et Y, Z deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(Y^2), \mathbb{E}(Z^2) < +\infty$. établir l'inégalité $\mathbb{E}(YZ|\mathcal{G})^2 \leq \mathbb{E}(Y^2|\mathcal{G})\mathbb{E}(Z^2|\mathcal{G})$ p.s.
On pourra remarquer que $\mathbb{E}[(Y + \theta Z)^2|\mathcal{G}] \geq 0$ p.s. pour tout $\theta \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3 *Produit*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et Y, Z deux variables aléatoires réelles de carré intégrable. Montrer que $\mathbb{E}\big(Y\,\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})\big) = \mathbb{E}\big(Z\,\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\big)$.

Exercice 4 *Variables positives et conditionnement*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et Y une variable aléatoire réelle positive. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}-$mesurable (aux négligeables près) qui contient $\{Y > 0\}$.

Exercice 5 *Variance conditionnelle*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et Y une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On définit $\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G}) := \mathbb{E}\big[(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G}\big]$ la variance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{G}$. Montrer que $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G})) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))$.

Exercice 6 *Conditionnement et égalité p.s.*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X, Y deux variables aléatoires réelles intégrables. On suppose que $\mathbb{E}(Y|X) = X$ et $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ p.s. Montrer que $X = Y$ p.s. On pourra remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé on a $\mathbb{E}\big[(X - Y)\mathbb{1}_{\{Y \leq x < X\}}\big] = \mathbb{E}\big[(Y - X)\mathbb{1}_{\{x < X, x < Y\}}\big] \geq 0$.

Exercice 7 *Inégalité de Hölder version conditionnelle*
Soient $p, q > 1$ deux réels conjugués, c'est-à-dire $1/p + 1/q = 1$. On rappelle l'inégalité de Young, pour tous $x, y \geq 0$, $xy \leq x^p/p + y^q/q$. Soient $Y \in \mathrm{L}^p$ et $Z \in \mathrm{L}^q$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On note $G := \{\mathbb{E}(|Y|^p|\mathcal{G}) > 0\} \cap \{\mathbb{E}(|Z|^q|\mathcal{G}) > 0\}$. En appliquant l'inégalité de Young, montrer que, sur G,

$$\frac{YZ}{\big(\mathbb{E}(|Y|^p|\mathcal{G})\big)^{1/p}\big(\mathbb{E}(|Z|^q|\mathcal{G})\big)^{1/q}} \leq \frac{|Y|^p}{p\,\mathbb{E}(|Y|^p|\mathcal{G})} + \frac{|Z|^q}{q\,\mathbb{E}(|Z|^q|\mathcal{G})}.$$

Soit $G_Y := \{\mathbb{E}(|Y|^p|\mathcal{G}) = 0\}$. Montrer que, sur G_Y, Y est nulle p.s. En déduire l'inégalité de Hölder $\mathbb{E}(|YZ| \mid \mathcal{G}) \leq \big(\mathbb{E}(|Y|^p|\mathcal{G})\big)^{1/p}\big(\mathbb{E}(|Z|^q|\mathcal{G})\big)^{1/q}$ p.s.

Exercice 8 *Espérance conditionnelle par rapport à la somme*
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On définit $S_n := X_1 + ... + X_n$. Montrer que $\mathbb{E}(X_1|S_n) = \mathbb{E}(X_i|S_n)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. En déduire $\mathbb{E}(X_1|S_n)$.

Exercice 9 *Singletons, tribu et conditionnement*
On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soient X la variable aléatoire définie par $X(\omega) = \cos(\pi\omega)$ et $\mathcal{G}$ l'ensemble formé des éléments $A \subseteq]0,1[$, tels que A ou A^c est dénombrable.

a) Vérifier que $\mathcal{G}$ est une tribu. Quel est le lien entre $\mathcal{G}$ et les singletons de $]0,1[$?
b) Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ presque sûrement.

Exercice 10 *Conditionnement poissonnien*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes, où X_j suit une loi de Poisson paramètre λ_j.

a) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
b) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(X_j = \ell \,|\, X_1 + \ldots + X_n = k)$.

Exercice 11 *(Non-)Extension d'une propriété de l'espérance conditionnelle*
On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soient les variables aléatoires $X = \mathbb{1}_{[0,3/4[}$, $Y = \mathbb{1}_{[0,1/2[}$ et $Z = \mathbb{1}_{[1/4,3/4[}$. Montrer que les variables Y et Z sont indépendantes d'où $\mathbb{E}(Y|Z) = \mathbb{E}(Y)$ p.s. Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y|X,Z)$ et vérifier que $\mathbb{E}(Y|X,Z) \neq \mathbb{E}(Y|X)$ même si Y et Z sont indépendantes.

Exercice 12 *Projection gaussienne*

a) Soit (X, Y) un couple gaussien centré défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En utilisant la propriété de projection de l'espérance conditionnelle montrer que $\mathbb{E}(Y|X) = cX$ p.s. où $c = \mathbb{E}(XY)/\mathbb{E}(X^2)$.
b) Soient $(X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré et $(a_1, \ldots, a_d)$, $(b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$. On définit $Y = a_1X_1 + \ldots + a_dX_d$ et $Z = b_1X_1 + \ldots + b_dX_d$. Que vaut $\mathbb{E}(Z|Y)$?

Exercice 13 *Somme aléatoire de variables aléatoires*
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires d'espérance commune $m = \mathbb{E}[X_1]$ et N une variable aléatoire indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$, de loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$. On pose $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[S_N|N]$. En déduire $\mathbb{E}[S_N]$.

Exercice 14 *Somme de variables exponentielles et conditionnement*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $T := X_1 + \ldots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}(h(X_1)|T)$ pour toute fonction h borélienne positive. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

Exercice 15 *Exemple de conditionnement discret*
Soient $n \geq 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note :

$$p_{ij} = \begin{cases} n!\, \frac{p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{i!j!(n-i-j)!}, & \text{si } i + j \leq n \\ 0, & \text{sinon} . \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe un couple aléatoire (X, Y) tel que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$.
b) Trouver les lois de X et de Y ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant X.
c) Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 16 *Encore des exemples de conditionnements discrets*

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p). Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Déterminer $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.
2. Soient $X_1, \ldots, X_p$ des variables indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Déterminer la loi de $(X_1, \ldots, X_p)$ sachant $X_1 + X_2 + \ldots + X_p = n$.

Exercice 17 *Conditionnement et indépendance*
Soit ε une variable aléatoire sur sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prenant seulement les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que ε est indépendante de $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathbb{E}(\varepsilon|\mathcal{G}) = 0$.

Exercice 18 *Calcul d'espérance conditionnelle*
Trouver la loi conditionnelle et l'espérance conditionnelle de Y sachant X, lorsque la densité du couple (X, Y) est donnée par :

a) $f(x, y) = x\, e^{-x(y+1)} \mathbb{1}_{\{x,y \geq 0\}}$.
b) $f(x, y) = 4x(y - x) \exp(-(x + y)) \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}$.

Exercice 19 *Conditionnement par le maximum*
Soient $(X_1, \ldots, X_n)$, n variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables ayant la même densité de probabilité $f(x)$ et $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ sa version réordonnée i.e. $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ presque sûrement. Déterminer la loi conditionnelle de $X_{(1)}$ sachant $X_{(n)} = x_n$ et $\mathbb{E}[X_{(1)}|X_{(n)}]$. Particulariser au cas où les variables X_i sont uniformes sur $[0, 1]$.

Exercice 20 *Loi conditionnelle et loi du couple*
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi de Poisson de paramètre y.

a) Calculer les lois du couple (X, Y), de X, ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant X.
b) Montrer que $\mathbb{E}\big[(X - Y)^2\big] = 1$, en conditionnant d'abord par rapport à Y et ensuite par rapport à X.

Exercice 21 *Suite construite par conditionnement*
Une variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Si $X_1 = x_1$, alors X_2 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_1, x_1 + 1]$. Si $X_2 = x_2$, alors X_3 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_2, x_2 + 1]$. Les variables aléatoires $X_4, \ldots, X_n$ sont définies de la même manière pour tous $n \geq 4$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 22 *Exemples de conditionnements gaussiens*
On considère un vecteur gaussien $[X, Y]'$ de moyenne $m = [1, -1]'$ et de matrice de covariance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la densité du vecteur $[X, Y]'$. Quelle est la loi de X ? de Y ? de $X + Y$?
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|Y]$. Quelle est sa loi ?

3. Si (U, V) est un vecteur gaussien centré réduit, que vaut $\mathbb{E}[U|U+V]$? Retrouver le résultat géométriquement.

Exercice 23 *Conditionnement gaussien par un couple*
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Le vecteur aléatoire X admet-il une densité ?
2. Déterminer $\mathbb{E}[X_1|X_2]$ et $\mathbb{E}[X_1|X_2, X_3]$.
3. Mêmes questions que ci-dessus lorsque

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$