

## FEUILLE D'EXERCICES # 2 : OPÉRATEURS ET THÉORIE SPECTRALE

### OPÉRATEURS ET LEURS DUAUX

Dans toute la suite  $\mathbb{K}$  désigne le corps des nombres réels ou des nombres complexes.  
Dans cette feuille les espaces  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach sauf si le contraire est supposé.

#### Exercice 1 Relations entre noyau et domaine

Soit  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  une application linéaire à domaine dense. Avec les notations de l'exercice 1.7 montrer que

$$\text{Ker}(T) \subset {}^\perp R(T'), \text{Ker}(T') = R(T)^\perp, \overline{R(T')} \subset \text{Ker}(T)^\perp, \overline{R(T)} = {}^\perp \text{Ker}(T').$$

Montrer que si de plus  $T$  est fermé  $\text{Ker}(T) = {}^\perp R(T')$ .

#### Exercice 2 Caractériser la surjectivité

$T : D(T) \subset E \rightarrow F$  une application linéaire fermée à domaine dense dans  $E$ .

1. On suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E \cap D(T))}$ . Montrer que  $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 2) \cap D(T))$ . Pour  $y \in B_F(0, r)$  on pourra construire une suite  $(x_n)$  de  $E$  telle que  $\sum_{n \geq 0} \|x_n\| < \infty$  et  $T\left(\sum_{n=0}^N x_n\right) \rightarrow y$  quand  $N \rightarrow \infty$ .
2. En déduire que s'il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $g \in D(T')$ ,  $r\|g\|_{F'} \leq \|T'g\|_{E'}$  alors  $T$  est surjectif. On pourra appliquer le théorème de Hahn-Banach au convexe fermé  $T(B_E \cap D(T))$  et un point de son complémentaire.
3. Montrer inversement que si  $T$  est surjectif, alors il existe  $r > 0$  tel que l'inégalité du point précédent est satisfaite.

#### Exercice 3 Image fermée

Soit  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  une application linéaire fermée à domaine dense dans  $E$ . Montrer les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $R(T)$  est fermé dans  $F$  ;
  2.  $R(T')$  est fermé dans  $E'$  ;
  3.  $R(T) = {}^\perp \text{Ker}(T') = \{y \in F : \langle g, y \rangle = 0, \forall g \in \text{Ker}(T')\}$  ;
  4.  $R(T') = \text{Ker}(T)^\perp = \{f \in E' : \langle f, x \rangle = 0, \forall x \in \text{Ker}(T)\}$ .
- a) À l'aide de l'exercice 2.1 montrer que  $1 \Leftrightarrow 3$  et  $4 \Rightarrow 2$ .
- b) Utiliser le principe de l'application ouverte en lien avec l'application, notée  $p_T, (x, Tx) \mapsto Tx$  de  $\Gamma(T)$  dans  $R(T)$  pour montrer que  $1 \Rightarrow 4$ .
- c) Supposons 2 et notons  $S$  l'application qui à  $x \in D(T)$  associe  $Tx \in \overline{R(T)}$ . Vérifier que  $\text{Ker}(S') = \{0\}$  et que  $R(S') = R(T')$ . Déduire que  $R(S')$  est fermée. Montrer que  $S$  est surjective en utilisant l'application  $p_{S'}$  et l'exercice précédent.

#### Exercice 4 Image fermée et inverse

Soit  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  une application linéaire fermée à domaine dense dans  $E$ . Montrer que

1.  $R(T) = F$  ssi  $T'$  admet une inverse continue ;
2.  $R(T') = E'$  ssi  $T$  admet une inverse continue.

**Exercice 5** *Opérations avec l'adjoint*

1. Soient  $T$  et  $S$  deux applications linéaires définies sur  $E$  tout entier à valeurs dans  $F$ . Montrer que  $(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S'$ .
2. On suppose maintenant que les applications linéaires  $T$  et  $S$  ont leur domaines et leurs images contenues dans  $E$ , que  $T$  est à domaine dense et que  $S$  est définie sur tout  $E$ . Montrer que  $(ST)' = T'S'$ . Si de plus  $TS$  est à domaine dense alors  $(TS)'$  est une extension de  $S'T'$ .

**Exercice 6** *Adjoint en  $\ell^2$*

Soit  $T_n \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$  défini par

$$T_n(x_1, x_2, \dots) = (x_n, x_{n+1}, \dots).$$

Montrer que

$$T'(f_1, f_2, \dots) = (0, \dots, 0, f_1, f_2, \dots)$$

Calculer  $\|T_n((x_1, x_2, \dots))\|$  et  $\|T'(f_1, f_2, \dots)\|$ . En déduire que l'application  $T \mapsto T'$  de  $L(E, F)$  dans  $L(F', E')$  n'est pas nécessairement continue pour la convergence ponctuelle, i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx$  pour tout  $x \in E$  n'implique pas nécessairement  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n g = T'g$  pour tout  $g \in F'$  dans la topologie forte de  $E$ .

**Exercice 7** *Domaine et dual*

Soit  $T : D(T) \subset \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{N})$ , défini sur

$$D(T) = \{(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) : (nu_n) \in \ell^1(\mathbb{N})\} \quad \text{par} \quad T(u_1, u_2, \dots) = (u_1, 2u_2, 3u_3, \dots).$$

Montrer que  $T$  est à domaine dense et que  $T$  est fermé. Trouver  $D(T')$ ,  $T'$  et  $\overline{D(T')}$ .

OPÉRATEURS COMPACTS

**Exercice 8** *CNS de compacité*

Soit  $E$  un espace de Banach réflexif et soit  $F$  un espace de Banach. Montrer que  $T \in L(E, F)$  est compact ssi l'image par  $T$  de toute suite faiblement convergente est convergente.

**Exercice 9** *Un exemple sur  $c_0(\mathbb{N})$*

Soit  $a = (a_n)$  une suite de  $\ell^1(\mathbb{N})$  telle que  $a_n > 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Soit l'application  $T_a : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$T_a(u_1, u_2, \dots) = \sum_{n \geq 1} a_n u_n, \quad (u_1, u_2, \dots) \in c_0(\mathbb{N}).$$

Montrer que  $T_a \in B(c_0(\mathbb{N}), \mathbb{R})$  est de rang 1 mais que  $T_a(B_{c_0(\mathbb{N})})$  n'est pas fermé mais son adhérence est compacte.

**Exercice 10** *Un exemple sur  $\ell^p(\mathbb{N})$  : multiplication*

Soit  $p \in [1, \infty]$  et soit  $a = (a_n)$  une suite de réels tel que l'application  $T_a : \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{N})$  par

$$T_a(u_1, u_2, \dots) = (a_1 u_1, \dots, a_n u_n, \dots) \quad (u_1, u_2, \dots) \in \ell^p(\mathbb{N})$$

est bien définie. Montrer que  $T_a \in B(\ell^p(\mathbb{N}))$  ssi  $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ . Montrer que  $T_a \in K(\ell^p(\mathbb{N}))$  ssi  $a = (a_n) \in c_0(\mathbb{N})$ .

**Exercice 11** *Comapcité et séparabilité*

Soient  $E, F$  espaces de Banach et soit  $T \in K(E, F)$ . Montrer que  $R(T)$  est séparable.

**Exercice 12** *Une première inégalité*

Soit  $E$  un espace de Banach réflexif, soit  $F$  un espace de Banach et soit  $T \in K(E, F)$ . On considère  $\|\cdot\|'_E$  une autre norme sur  $E$  définissant une topologie moins fine que celle définie par la norme  $\|\cdot\|_E$ . Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E + C_\varepsilon \|x\|'_E.$$

**Exercice 13** *Une deuxième inégalité*

Soient  $(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2), (E_3, \|\cdot\|_3)$  des espaces de Banach tels que  $E_1 \subset E_2 \subset E_3$ , l'injection canonique  $i : E_1 \rightarrow E_2$  soit compacte et l'injection canonique  $j : E_2 \rightarrow E_3$  soit continue. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall x \in E_1, \quad \|x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 + C_\varepsilon \|x\|_3.$$

**Exercice 14** *Décalage à droite*

L'opérateur de décalage à droite  $T_d : \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{N}), T_d(u_1, u_2, \dots) = (0, u_1, u_2, \dots)$  est-il compact ?

## ALTERNATIVE DE FREDHOLM

**Exercice 15** *Stationarité*

Soit  $E$  un espace de Banach et  $T \in K(E)$ . Montrer qu'il existe un entier  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Ker}((I - T)^n) = \text{Ker}((I - T)^r)$  pour tout  $n \geq r$ . En déduire que  $R((I - T)^n) = R((I - T)^r)$ , pour tout  $n \geq r$ .

## SPECTRE D'UN OPÉRATEUR BORNÉ

**Exercice 16** *Spectre d'une projection*

Soient  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$ , et  $P \in \mathcal{B}(E)$  une projection  $P^2 = P$ . Montrer que si  $P \neq 0$  et  $P \neq I_E$ , alors  $\text{vp}(P) = \sigma(P) = \{0, 1\}$ .

**Exercice 17** *Suite de valeurs résolvantes*

Soient  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$ ,  $T \in B(E)$ , et  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $\rho(T)$  convergente vers  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On suppose que la suite d'opérateurs  $(R_T(\lambda_n) = (\lambda_n I - T)^{-1})_{n \geq 1}$  est bornée dans  $B(E)$ . Montrer que  $\lambda \in \rho(T)$ . On pourra utiliser l'équation de la résolvante.

**Exercice 18** *Suite des résolvantes*

Soient  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$ , et  $(T_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $B(E)$  convergeant vers  $T$  dans  $B(E)$ . Montrer que pour tout compact  $K \subset \rho(T)$ , il existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $K \subset \rho(T_n)$ , et que la suite des résolvantes restreintes à ce compact  $R_{T_n} : K \rightarrow \mathcal{L}(E)$ , où  $n \geq n_0$ , converge uniformément sur  $K$  vers  $R_T$ .

**Exercice 19** *Opérateur multiplication*

Soit  $E$  l'espace de Banach des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme uniforme  $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$ . On définit l'opérateur  $T : E \rightarrow E$  par

$$\forall f \in E, \quad Tx(t) = a(t)x(t),$$

où  $a(t) = \min(3t - 1, 1), t \in [0, 1]$ .

1. Montrer que  $T \in \mathcal{L}(E)$  et calculer  $\|T\|_{\mathcal{L}(E)}$ .
2. Montrer que l'opérateur  $\lambda I - T$  n'est pas surjectif pour tout  $\lambda \in [-1, 1]$ .
3. Déterminer  $\sigma(T)$  le spectre de  $T$ .
4. Montrer que 1 est la seule valeur propre de  $T$ .

**Exercice 20** *Encore l'opérateur de multiplication sur  $\ell^p(\mathbb{N})$*

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. Soit  $1 \leq p < \infty$  et soit  $T_a : \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{N})$  l'application linéaire définie par  $(T_a u)_n = a_n u_n$ .

1. Montrer que  $T_a$  est continu si et seulement si  $(a_n)$  est bornée.
2. Lorsque  $T_a$  est continu, calculer ses valeurs propres et son spectre.

**Exercice 21** *Encore le décalage à droite*

Soit  $1 \leq p \leq \infty$  et soit  $S : \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{N})$  l'application linéaire définie par  $(Su)_n = u_{n+1}$ .

1. Montrer que si  $p \neq \infty$  alors  $\text{vp}(S) = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  et que si  $p = \infty$  alors  $\text{vp}(S) = \overline{D(0, 1)}$ .
2. En déduire que  $\sigma(S) = \overline{D(0, 1)}$ .

**Exercice 22** *Décalage à droite en continu*

On note  $E$  l'espace de Banach des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continues et bornées, muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . On définit sur  $E$  l'opérateur  $T : E \rightarrow E$  par  $T(x)(t) = x(t+1)$  pour  $x \in E, t \in \mathbb{R}$ . Déterminer le spectre de  $T$ . On pourra commencer par étudier les valeurs propres de  $T$ , puis remarquer que  $T$  est inversible.

## OPÉRATEURS SUR UN ESPACE DE HILBERT

**Exercice 23** *Suite de projections*

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel ou complexe.

1. Soit  $(C_n)_{n \geq 1}$  une suite de sous-ensembles convexes fermés non vides de  $H$  telle que

$$\forall n \geq 1, \quad C_{n+1} \subset C_n \quad \text{et} \quad C_\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n \neq \emptyset.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $p_{C_n}$  la projection orthogonale sur  $C_n$ .

- (a) Montrer que  $C_\infty$  est un convexe fermé non vide de  $H$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $x \in H$ , la suite de réels  $(\|x - p_{C_n}(x)\|)_{n \geq 1}$  est croissante et majorée.
  - (c) En utilisant la formule de la médiane, montrer que pour tout  $x \in H$ , la suite  $(p_{C_n}(x))_{n \geq 1}$  est de Cauchy dans  $H$ .
  - (d) Montrer que pour tout  $x \in H$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|p_{C_n}(x) - p_{C_\infty}(x)\| = 0$ .
2. Soit  $(C_n)_{n \geq 1}$  une suite de sous-ensembles convexes fermés non vides de  $H$  telle que  $\forall n \geq 1, C_n \subset C_{n+1}$ . Montrer que

$$C_\infty = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n}$$

est un sous-ensemble convexe fermé non vide de  $H$  et que pour tout  $x \in H$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|p_{C_n}(x) - p_{C_\infty}(x)\| = 0$ .

**Exercice 24** *Théorème ergodique de Von Neumann*

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $T \in B(H)$  un opérateur linéaire continu sur  $H$  tel que  $\|T\|_{B(H)} \leq 1$ . On considère

$$\forall n \geq 0, \quad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k,$$

où  $T^k = T \circ \dots \circ T$  avec  $k$  termes.

1. Montrer les équivalences suivantes

$$Tx = x \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \Leftrightarrow \langle x, Tx \rangle = \|x\|^2.$$

2. Montrer

$$\text{Ker}(I - T) = \text{Ker}((I - T)^*).$$

3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$  pour tout  $x \in \overline{\text{Im}(I - T)}$ .

4. En déduire le théorème ergodique suivant

$$\forall x \in H, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x = p_{\text{Ker}(I-T)}(x),$$

où  $p_{\text{Ker}(I-T)}$  désigne la projection orthogonale sur  $\text{Ker}(I - T)$ .

5. Application : Soit  $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$  et soit une fonction  $2\pi$ -périodique de carré intégrable  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Calculer la limite dans  $L^2(\mathbb{T})$  de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\cdot + k\alpha).$$

**Exercice 25** *Lemme de Schur*

Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de réels positifs. On suppose qu'il existe une constante  $C > 0$  et une suite de réels strictement positifs  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} w_j \leq C w_i \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} w_i \leq C w_j.$$

1. Montrer que si  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , la suite  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad y_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} x_j$$

appartient à  $\ell^2(\mathbb{N})$  et vérifie  $\|y\|_{\ell^2} \leq C \|x\|_{\ell^2}$ .

2. En déduire que l'opérateur de Hilbert

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x_j}{i+j+1} \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

appartient à  $B(\ell^2(\mathbb{N}))$ , et donner une estimation de sa norme (on pourra prendre  $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ).

**Exercice 26** *Base hilbertienne*

Soit  $L^2(\mathbb{T})$  l'espace des fonctions  $2\pi$ -périodiques de carré intégrable.

1. Montrer que pour tout  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ , la convolution

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt,$$

est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et que  $f \star g$  est une fonction  $2\pi$ -périodique continue bornée vérifiant

$$\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\|g\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

2. Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f)^2 e^{ikx}$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f \star f$ , où  $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$  sont les coefficients de Fourier de  $f$ .

**Exercice 27** *Théorème de Stampacchia dans le cas réel non symétrique*

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel,  $\phi$  une forme bilinéaire continue coercive (pas nécessairement symétrique),  $f \in H'$  une forme linéaire continue et  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $H$ . Soient  $A \in B(H)$  et  $b \in H$  uniquement déterminés par les identités suivantes :

$$\forall x, y \in H, \phi(x, y) = \langle A(x), y \rangle, \forall x \in H, f(x) = \langle x, b \rangle.$$

1. On définit l'application  $T_\lambda : H \rightarrow H$  définie par

$$\forall x \in H, T_\lambda(x) = p_C(\lambda b + x - \lambda A(x)),$$

où  $p_C$  désigne la projection sur  $C$  et  $\lambda > 0$ . Montrer qu'il existe  $\lambda_0 > 0$

$$\forall 0 < \lambda < \lambda_0, \exists 0 \leq c_\lambda < 1, \forall x, y \in H, \|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)\| \leq c_\lambda \|x - y\|.$$

2. En déduire qu'il existe un unique point  $x_0 \in C$  vérifiant

$$\forall y \in C, \langle A(x_0) - b, x_0 - y \rangle \leq 0$$

3. En déduire qu'il existe un unique  $x_0 \in C$  vérifiant

$$\forall y \in C, \phi(x_0, y - x_0) \geq f(y - x_0).$$

## ANALYSE SPECTRALE HILBERTIENNE

**Exercice 28** *CNS commutation*

Soient  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K}$ , et  $T, S$  deux opérateurs autoadjoints compacts sur  $H$ . Montrer que les opérateurs  $T$  et  $S$  commutent  $ST = TS$ , si et seulement si il existe une base hilbertienne de  $H$  qui soit propre à la fois pour  $S$  et  $T$ .

**Exercice 29** *Encore l'opérateur multiplication : le cas Hilbert  $\ell^2(\mathbb{N})$* 

On considère l'espace de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{N})$  sur  $\mathbb{K}$ . Si  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  est une suite bornée d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on définit l'opérateur  $T_a : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  par

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}), T_a(x) = (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

1. Montrer que  $T_a \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$  et calculer  $\|T_a\|_{B(\ell^2(\mathbb{N}))}$ .

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur  $T_a$  est donné par  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Déterminer la dimension des sous-espaces propres associés.
3. Montrer  $\sigma(T_a) = \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$ .
4. Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{K}$ , montrer qu'il existe  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  telle que  $K = \sigma(T_a)$ .
5. Montrer que  $T_a$  est compact si et seulement si la suite  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .
6. Déterminer l'opérateur adjoint  $T_a^*$ .
7. Si  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  est une suite bornée de réels de limite nulle, déterminer la décomposition spectrale de l'opérateur autoadjoint compact  $T_a$ . En déduire que le noyau  $\text{Ker } T_a$  est de dimension quelconque  $0 \leq \dim(\text{Ker } T_a) \leq +\infty$ .

**Exercice 30** *Problème de Sturm-Liouville*

On se propose de démontrer que pour toute fonction  $q \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , il existe une base hilbertienne  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $L^2([0, 1])$  composée de fonctions  $C^2(]0, 1[) \cap C^0([0, 1])$ , et une suite de réels  $(\nu_j)_{j \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad e_j''(x) + q(x)e_j(x) + \nu_j e_j(x) = 0, \quad e_j(0) = e_j(1) = 0$$

et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} |\nu_j| = +\infty$

1. Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  et  $u \in C^2(]0, 1[) \cap C^0([0, 1])$  vérifiant

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad u''(x) + zu(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Montrer que  $u' \in L^\infty(]0, 1[)$

(b) Montrer que

$$-\int_0^1 |u'(x)|^2 dx + z \int_0^1 |u(x)|^2 dx = 0.$$

(c) En déduire que  $u = 0$  sur  $[0, 1]$ .

2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $f \in L^2([0, 1])$ , on considère l'opérateur

$$R_0(\lambda)f(x) = \int_0^1 K_\lambda(x, y)f(y)dy,$$

de noyau

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad K_\lambda(x, y) = \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} \mathbb{1}_{[0, x]}(y) - \frac{\sin(\lambda x)}{\sin \lambda} \frac{\sin(\lambda(1-y))}{\lambda}.$$

Montrer que l'opérateur  $R_0(\lambda)$  définit un endomorphisme compact de  $L^2([0, 1])$ .

3. Montrer que pour tout  $f \in C^0([0, 1])$ ,  $R_0(\lambda)f \in C^2([0, 1])$ , et vérifie

$$\forall x \in [0, 1], \quad u''(x) + \lambda^2 u(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

4. Montrer que pour tout  $f \in C^0([0, 1])$  et  $\lambda > 0$ ,

$$\int_0^1 |[R_0(i\lambda)f]'(x)|^2 dx + \lambda^2 \int_0^1 |R_0(i\lambda)f(x)|^2 dx = - \int_0^1 f(x) \overline{R_0(i\lambda)f(x)} dx.$$

En déduire

$$\forall \lambda > 0, \quad \|R_0(i\lambda)\|_{B(L^2([0, 1]))} \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

5. Montrer

$$\forall f \in C^0([0, 1]), \forall \lambda, \mu > 0, \quad R_0(i\lambda)f - R_0(i\mu)f = (\lambda^2 - \mu^2)R_0(i\lambda)R_0(i\mu)f,$$

puis

$$\forall \lambda, \mu > 0, \quad R_0(i\lambda) - R_0(i\mu) = (\lambda^2 - \mu^2)R_0(i\lambda)R_0(i\mu).$$

En déduire que  $R_0(i\lambda)$  et  $R_0(i\mu)$  commutent.

6. Montrer que toute fonction  $f \in C_0^2(]0, 1[)$  à support compact contenu dans  $]0, 1[$  et  $\mu > 0$ ,

$$R_0(i\mu)(f'') = \mu^2 R_0(i\mu)f + f.$$

En déduire que

$$\forall f \in L^2([0, 1]), \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|(i\mu)^2 R_0(i\mu)f - f\|_{L^2([0, 1])} = 0.$$

7. Soient  $\lambda > 0$  et  $f \in L^2([0, 1])$  tel que  $R_0(i\lambda)f = 0$ . En utilisant la question 5, montrer que  $R_0(i\mu)f = 0$  pour tout  $\mu > 0$ . En déduire que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $R_0(i\lambda) \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$  est injectif.

8. Montrer que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $R_0(i\lambda)$  est un opérateur autoadjoint.

9. Soient  $q \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  et  $Q$  l'opérateur de multiplication par  $q$ ,

$$\forall x \in [0, 1], \quad (Qu)(x) = q(x)u(x).$$

Montrer que pour tout  $\lambda > \|q\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$ ,

$$R(i\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k R_0(i\lambda)(QR_0(i\lambda))^k$$

définit un opérateur autoadjoint compact et injectif.

10. Montrer que

$$\forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0, 1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda) = R_0(i\lambda) - R_0(i\lambda)QR(i\lambda).$$

En déduire

$$\forall f \in L^2([0, 1]), \forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0, 1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda)f \in C^0([0, 1]),$$

puis

$$\forall f \in C^0([0, 1]), \forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0, 1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda)f \in C^2([0, 1]) \text{ et } [R(i\lambda)f](0) = [R(i\lambda)f](1) = 0.$$

11. Montrer que

$$\forall f \in C^0([0, 1]), \forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0, 1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda)f \in C^2(]0, 1[) \cap C^0([0, 1]),$$

et vérifie

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad u''(x) + q(x)u(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

12. Conclure.

**Exercice 31** *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, et  $T \in B(H)$ . On dit que  $T$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H$  telle que  $\sum_{n \geq 0} \|Te_n\|^2 < \infty$ .

1. Soit  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $H$ . Montrer que  $\sum_{p \geq 0} \|T^*f_p\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|Te_n\|^2$ . En déduire que pour toute base hilbertienne  $(\tilde{e}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de  $H$ ,  $\sum_{m \geq 0} \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|Te_n\|^2$ . On note  $\|T\|_{HS}^2$  cette quantité.
2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est continu, de norme  $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$ .
3. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?
4. On considère dans cette question  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ , et on fixe  $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ . On définit l'opérateur d'anti-convolution  $\Gamma_c$  par

$$\Gamma_c : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H \mapsto \left( \sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p} x_p \right)_{n \in \mathbb{N}} \in H.$$

Montrer que  $\Gamma_c$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si  $\sum_{n \geq 0} (n+1)c_n^2 < \infty$ .

**Exercice 32** *Opérateur à noyau*

On considère l'opérateur intégral

$$T_K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), \quad f \mapsto T_K(f),$$

où  $[T_K(f)](x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$  pour presque tout  $x \in [0, 1]$ , et où le noyau est défini par

$$K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \min(x, y).$$

1. Montrer que  $T_K$  est un opérateur autoadjoint.
2. Montrer que
 
$$\forall f \in L^2([0, 1]), \quad T_K(f) \in C^0([0, 1]).$$
3. Soit  $\lambda \in \sigma(T_K) \setminus \{0\}$ . Justifier que  $\lambda$  est une valeur propre de  $T_K$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que toute fonction propre  $f \in L^2([0, 1])$  associée à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,

$$T_K(f) = \lambda f,$$

appartient à l'espace  $C^2([0, 1])$  et vérifie

$$\forall x \in [0, 1], \quad f''(x) + \frac{1}{\lambda}f(x) = 0, \quad f(0) = f'(1) = 0.$$

4. En déduire

$$\sigma(T_K) = \{0\} \cup \left\{ \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

et la décomposition spectrale de l'opérateur  $T_K$ .

5. Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} = \|K\|_{L^2([0,1]^2)}^2.$$

6. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$