Feuille d'exercices # 2 : Théorie spectrale et opérateurs

Opérateurs et leurs duaux

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou des nombres complexes.
Dans cette feuille les espaces E et F sont des espaces de Banach sauf si le contraire est supposé.

Exercice 1 *Relations entre noyau et domaine*
Soit $T : D(T) \subset E \to F$ une application linéaire à domaine dense. Avec les notations de l'exercice 1.7 montrer que

$$\mathrm{Ker}(T) \subset {}^{\perp}R(T'),\ \mathrm{Ker}(T') = R(T)^{\perp},\ \overline{R(T')} \subset \mathrm{Ker}(T)^{\perp},\ \overline{R(T)} = {}^{\perp}\mathrm{Ker}(T').$$

Montrer que si de plus T est fermé $\mathrm{Ker}(T) = {}^{\perp}R(T')$.

Exercice 2 *Caractériser la surjectivité*
$T : D(T) \subset E \to F$ une application linéaire fermée à domaine dense dans E.

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E \cap D(T))}$. Montrer que $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 2) \cap D(T))$. Pour $y \in B_F(0, r)$ on pourra construire une suite (x_n) de E telle que $\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty$ et $T\Big(\sum_{n=0}^{N} x_n|big) \to y$ quand $N \to \infty$.
2. En déduire que s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $g \in D(T')$, $r\|g\|_{F'} \leq \|T'g\|_{E'}$ alors T est surjectif. On pourra appliquer le théorème de Hahn-Banach au convexe fermé $\overline{T(B_E \cap D(T))}$ et un point de son complémentaire.
3. Montrer inversement que si T est surjectif, alors il existe $r > 0$ tel que l'inégalité du point précédent est satisfaite.

Exercice 3 *Image fermée*
Soit $T : D(T) \subset E \to F$ une application linéaire fermée à domaine dense dans E. Montrer les affirmation suivantes sont équivalentes :

1. $R(T)$ est fermé dans F ;
2. $R(T')$ est fermé dans E' ;
3. $R(T) = {}^{\perp}\mathrm{Ker}(T') = \{y \in F : \langle g, y\rangle = 0,\ \forall g \in \mathrm{Ker}(T')\}$;
4. $R(T') = \mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \{f \in E' : \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in \mathrm{Ker}(T)\}$.

a) À l'aide de l'exercice 2.1 montrer que $1 \Leftrightarrow 3$ et $4 \Rightarrow 2$.

b) Utiliser le principe de l'application ouverte en lien avec l'application, notée p_T, $(x, Tx) \mapsto Tx$ de $\Gamma(T)$ dans $R(T)$ pour montrer que $1 \Rightarrow 4$.

c) Supposons 2 et notons S l'application qui à $x \in D(T)$ associé $Tx \in \overline{R(T)}$. Vérifier que $\mathrm{Ker}(S') = \{0\}$ et que $R(S') = R(T')$. Déduire que $R(S')$ est fermée. Montrer que S est surjective en utilisant l'application $p_{S'}$ et l'exercice précédent.

Exercice 4 *Image fermée et inverse*
Soit $T : D(T) \subset E \to F$ une application linéaire fermée à domaine dense dans E. Montrer que

1. $R(T) = F$ ssi T' admet une inverse continue ;
2. $R(T') = E'$ ssi T admet une inverse continue.

Exercice 5 *Opérations avec l'adjoint*

1. Soient T et S deux applications linéaires définies sur E tout entier à valeurs dans F. Montrer que $(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S'$.
2. On suppose maintenant que les applications linéaires T et S ont leur domaines et leurs images contenues dans E, que T est à domaine dense et que S est définie sur tout E. Montrer que $(ST)' = T'S'$. Si de plus TS est à domaine dense alors $(TS)'$ est une extension de $S'T'$.

Exercice 6 *Adjoint en ℓ^2*
Soit $T_n \in L(\ell^2(\mathbb{N})$ défini par

$$T_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_n, x_{n+1}, \ldots).$$

Montrer que

$$T'(f_1, f_2, \ldots) = (0, \ldots, 0, f_1, f_2, \ldots)$$

Calculer $\|T_n((x_1, x_2, \ldots)\|$ et $\|T'(f_1, f_2, \ldots)\|$. En déduire que l'application $T \mapsto T'$ de $L(E, F)$ dans $L(F'E')$ n'est pas nécessairement continue pour la convergence ponctuelle, i.e. $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ pour tout $x \in E$ n'implique pas nécessairement $\lim_{n\to\infty} T_n' g = T'g$ pour tout $g \in F'$ dans la topologie forte de E.

Exercice 7 *Domaine et dual*
Soit $T : D(T) \subset \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$, défini sur

$$D(T) = \{(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) : (nu_n) \in \ell^1(\mathbb{N})\} \quad \text{par} \quad T(u_1, u_2, \ldots) = (u_1, 2u_2, 3u_3, \ldots).$$

Montrer que T est à domaine dense et que T est fermé. Trouver $D(T')$, T' et $\overline{D(T')}$.

Opérateurs compacts

Exercice 8 *CNS de compacité*
Soit E un espace de Banach réflexif et soit F un espace de Banach. Montrer que $T \in L(E, F)$ est compact ssi l'image par T de toute suite faiblement convergente est convergente.

Exercice 9 *Un exemple sur $c_0(\mathbb{N})$*
Soit $a = (a_n)$ une suite de $\ell^1(\mathbb{N})$ telle que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. Soit l'application $T_a : c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$T_a(u_1, u_2, \ldots) = \sum_{n\geq 1} a_n u_n, \quad (u_1, u_2, \ldots) \in c_0(\mathbb{N}).$$

Montrer que $T_a \in B(c_0(\mathbb{N}), \mathbb{R})$ est de rang 1 mais que $T_a(B_{c_0(\mathbb{N})})$ n'est pas fermé mais son adhérence est compacte.

Exercice 10 *Un exemple sur $\ell^p(\mathbb{N})$: multiplication*
Soit $p \in [1, \infty]$ et soit $a = (a_n)$ une suite de réels tel que l'application $T_a : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ par

$$T_a(u_1, u_2, \ldots) = (a_1 u_1, \ldots, a_n u_n, \ldots) \quad (u_1, u_2, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N})$$

est bien définie. Montrer que $T_a \in B(\ell^p(\mathbb{N}))$ ssi $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrer que $T_a \in K(\ell^p(\mathbb{N}))$ ssi $a = (a_n) \in c_0(\mathbb{N})$.

Exercice 11 *Comapcité et séparabilité*
Soient E, F espaces de Banach et soit $T \in K(E,F)$. Montrer que $R(T)$ est séparable.

Exercice 12 *Une première inégalité*
Soit E un espace de Banach réflexif, soit F un espace de Banach et soit $T \in K(E,F)$. On considère $\|\cdot\|'_E$ une autre norme sur E définissant une topologie moins fine que celle définie par la norme $\|\cdot\|_E$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E + C_\varepsilon \|x\|'_E.$$

Exercice 13 *Une deuxième inégalité*
Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$, $(E_3, \|\cdot\|_3)$ des espaces de Banach tels que $E_1 \subset E_2 \subset E_3$, l'injection canonique $i : E_1 \to E_2$ soit compacte et l'injection canonique $j : E_2 \to E_3$ soit continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in E_1, \quad \|x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 + C_\varepsilon \|x\|_3.$$

Exercice 14 *Décalage à droite*
L'opérateur de décalage à droite $T_d : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$, $T_d(u_1, u_2, \dots) = (0, u_1, u_2, \dots)$ est-il compact ?

Alternative de Fredholm

Exercice 15 *Stationarité*
Soit E un espace de Banach et $T \in K(E)$. Montrer qu'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}((I-T)^n) = \mathrm{Ker}((I-T)^r)$ pour tout $n \geq r$. En déduire que $R((I-T)^n) = R((I-T)^r)$, pour tout $n \geq r$.

Spectre d'un opérateur borné

Exercice 16 *Spectre d'une projection*
Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, et $P \in \mathcal{B}(E)$ une projection $P^2 = P$. Montrer que si $P \neq 0$ et $P \neq \mathrm{I}_E$, alors $\mathrm{vp}(P) = \sigma(P) = \{0, 1\}$.

Exercice 17 *Suite de valeurs résolvantes*
Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, $T \in B(E)$, et $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\rho(T)$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que la suite d'opérateurs $(R_T(\lambda_n) = (\lambda_n I - T)^{-1})_{n \geq 1}$ est bornée dans $B(E)$. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$. On pourra utiliser l'équation de la résolvante.

Exercice 18 *Suite des résolvantes*
Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, et $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite de $B(E)$ convergeant vers T dans $B(E)$. Montrer que pour tout compact $K \subset \rho(T)$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $K \subset \rho(T_n)$, et que la suite des résolvantes restreintes à ce compact $R_{T_n} : K \to \mathcal{L}(E)$, où $n \geq n_0$, converge uniformément sur K vers R_T.

Exercice 19 *Opérateur multiplication*
Soit E l'espace de Banach des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$. On définit l'opérateur $T : E \to E$ par

$$\forall f \in E, \quad Tx(t) = a(t)x(t),$$

où $a(t) = \min(3t-1, 1)$, $t \in [0,1]$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Montrer que l'opérateur $\lambda I - T$ n'est pas surjectif pour tout $\lambda \in [-1, 1]$.
3. Déterminer $\sigma(T)$ le spectre de T.
4. Montrer que 1 est la seule valeur propre de T.

Exercice 20 *Encore l'opérateur de multiplication sur $\ell^p(\mathbb{N})$*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $T_a : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ l'application linéraire définie par $(T_a u)_n = a_n u_n$.

1. Montrer que T_a est continu si et seulement si (b_n) est bornée.
2. Lorsque T_a est continu, calculer ses valeurs propres et son spectre.

Exercice 21 *Encore le décalage à droite*
Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit $S : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ l'application linéraire définie par $(Su)_n = u_{n+1}$.

1. Montrer que si $p \neq \infty$ alors $\mathrm{vp}(S) = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et que si $p = \infty$ alors $\mathrm{vp}(S) = \overline{D(0,1)}$.
2. En déduire que $\sigma(S) = \overline{D(0,1)}$.

Exercice 22 *Décalage à droite en continu*
On note E l'espace de Banach des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}$. On définit sur E l'opérateur $T : E \to E$ par $T(x)(t) = x(t+1)$ pour $x \in E$, $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le spectre de T. On pourra commencer par étudier les valeurs propres de T, puis remarquer que T est inversible.

Opérateurs sur un espace de Hilbert

Exercice 23 *Suite de projections*
Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe.

1. Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles convexes fermés non vides de H telle que
$$\forall n \geq 1, \quad C_{n+1} \subset C_n \quad \text{et} \quad C_\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n \neq \emptyset.$$
Pour tout $n \geq 1$, on note p_{C_n} la projection orthogonale sur C_n.
   (a) Montrer que C_∞ est un convexe fermé non vide de H.
   (b) Montrer que pour tout $x \in H$, la suite de réels $(\|x - p_{C_n}(x)\|)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée.
   (c) En utilisant la formule de la médiane, montrer que pour tout $x \in H$, la suite $(p_{C_n}(x))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans H.
   (d) Montrer que pour tout $x \in H$, $\lim_{n\to+\infty} \|p_{C_n}(x) - p_{C_\infty}(x)\| = 0$.
2. Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles convexes fermés non vides de H telle que $\forall n \geq 1$, $C_n \subset C_{n+1}$. Montrer que
$$C_\infty = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n}$$
est un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et que pour tout $x \in H$, $\lim_{n\to+\infty} \|p_{C_n}(x) - p_{C_\infty}(x)\| = 0$.

Exercice 24 *Théorème ergodique de Von Neumann*
Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $T \in B(H)$ un opérateur linéaire continu sur H tel que $\|T\|_{B(H)} \leq 1$. On considère

$$\forall n \geq 0, \quad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k,$$

où $T^k = T \circ ... \circ T$ avec k termes.

1. Montrer les équivalences suivantes
$$Tx = x \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \Leftrightarrow \langle x, Tx \rangle = \|x\|^2.$$
2. Montrer
$$\mathrm{Ker}(I - T) = \mathrm{Ker}\big((I - T)^*\big).$$
3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} T_n(x)$ pour tout $x \in \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$.
4. En déduire le théorème ergodique suivant
$$\forall x \in H, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k x = \lim_{n \to +\infty} T_n x = p_{\mathrm{Ker}(I-T)}(x),$$
où $p_{\mathrm{Ker}(I-T)}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(I - T)$.
5. Application : Soit $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ et soit une fonction 2π-périodique de carré intégrable $f \in L^2(\mathbb{T})$. Calculer la limite dans $L^2(\mathbb{T})$ de
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\cdot + k\alpha).$$

Exercice 25 *Lemme de Schur*
Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ et une suite de réels strictement positifs $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} w_j \leq C w_i \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} w_i \leq C w_j.$$

1. Montrer que si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, la suite $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad y_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} x_j$$
appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ et vérifie $\|y\|_{l^2} \leq C \|x\|_{l^2}$.
2. En déduire que l'opérateur de Hilbert
$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) \ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x_j}{i + j + 1} \Big)_{i \in \mathbb{N}}$$
appartient à $B(\ell^2(\mathbb{N}))$, et donner un estimation de sa norme (on pourra prendre $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$).

Exercice 26 *Base hilbertienne*
Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable.

1. Montrer que pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, la convolution
$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt,$$
est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $f * g$ est une fonction 2π-périodique continue bornée vérifiant
$$\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\|g\|_{L^2(\mathbb{T})}$$
2. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, montrer que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)^2 e^{ikx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f \star f$, où $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients de Fourier de f.

Exercice 27 *Théorème de Stampacchia dans le cas réel non symétrique*
Soit H un espace de Hilbert réel, ϕ une forme bilinéaire continue coercive (pas nécessairement symétrique), $f \in H'$ une forme linéaire continue et C une partie convexe fermée non vide de H. Soient $A \in B(H)$ et $b \in H$ uniquement déterminés par les identités suivantes :
$$\forall x, y \in H,\ \phi(x,y) = \langle A(x), y\rangle,\ \forall x \in H,\ f(x) = \langle x, b\rangle.$$

1. On définit l'application $T_\lambda : H \to H$ définie par
$$\forall x \in H, \quad T_\lambda(x) = p_C(\lambda b + x - \lambda A(x)),$$
où p_C désigne la projection sur C et $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe $\lambda_0 > 0$
$$\forall 0 < \lambda < \lambda_0, \exists 0 \leq c_\lambda < 1, \forall x, y \in H, \quad \|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)\| \leq c_\lambda\|x - y\|.$$
2. En déduire qu'il existe un unique point $x_0 \in C$ vérifiant
$$\forall y \in C, \quad \langle A(x_0) - b, x_0 - y\rangle \leq 0$$
3. En déduire qu'il existe un unique $x_0 \in C$ vérifiant
$$\forall y \in C, \quad \phi(x_0, y - x_0) \geq f(y - x_0).$$

Analyse spectrale hilbertienne

Exercice 28 *CNS commutation*
Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, et T, S deux opérateurs autoadjoints compacts sur H. Montrer que les opérateurs T et S commutent $ST = TS$, si et seulement si il existe une base hilbertienne de H qui soit propre à la fois pour S et T.

Exercice 29 *Encore l'opérateur multiplication : le cas Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$*
On considère l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{K}$. Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ est une suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$, on définit l'opérateur $T_a : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ par
$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad T_a(x) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que $T_a \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ et calculer $\|T_a\|_{B(\ell^2(\mathbb{N}))}$.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur T_a est donné par $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer la dimension des sous-espaces propres associés.
3. Montrer $\sigma(T_a) = \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$.
4. Pour tout compact K de $\mathbb{K}$, montrer qu'il existe $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que $K = \sigma(T_a)$.
5. Montrer que T_a est compact si et seulement si la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
6. Déterminer l'opérateur adjoint T_a^*.
7. Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$ est une suite bornée de réels de limite nulle, déterminer la décomposition spectrale de l'opérateur autoadjoint compact T_a. En déduire que le noyau Ker T_a est de dimension quelconque $0 \leq \dim(\text{Ker } T_a) \leq +\infty$.

Exercice 30 *Problème de Sturm-Liouville*
On se propose de démontrer que pour toute fonction $q \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, il existe une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ composée de fonctions $C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1])$, et une suite de réels $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall x \in]0,1[, \quad e_j''(x) + q(x)e_j(x) + \nu_j e_j(x) = 0, \qquad e_j(0) = e_j(1) = 0$$

et $\lim_{j\to+\infty} |\nu_j| = +\infty$

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $u \in C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1])$ vérifiant

$$\forall x \in]0,1[, \quad u''(x) + zu(x) = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

   (a) Montrer que $u' \in L^\infty(]0,1[)$

   (b) Montrer que

$$-\int_0^1 |u'(x)|^2 dx + z\int_0^1 |u(x)|^2 dx = 0.$$

   (c) En déduire que $u = 0$ sur $[0,1]$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $f \in L^2([0,1])$, on considère l'opérateur

$$R_0(\lambda)f(x) = \int_0^1 K_\lambda(x,y)f(y)dy,$$

de noyau

$$\forall x, y \in [0,1], \quad K_\lambda(x,y) = \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda}\mathbb{1}_{[0,x]}(y) - \frac{\sin(\lambda x)}{\sin\lambda}\frac{\sin(\lambda(1-y))}{\lambda}.$$

Montrer que l'opérateur $R_0(\lambda)$ définit un endomorphisme compact de $L^2([0,1])$.

3. Montrer que pour tout $f \in C^0([0,1])$, $R_0(\lambda)f \in C^2([0,1])$, et vérifie

$$\forall x \in [0,1], \quad u''(x) + \lambda^2 u(x) = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

4. Montrer que pour tout $f \in C^0([0,1])$ et $\lambda > 0$,

$$\int_0^1 |[R_0(i\lambda)f]'(x)|^2 dx + \lambda^2 \int_0^1 |R_0(i\lambda)f(x)|^2 dx = -\int_0^1 f(x)\overline{R_0(i\lambda)f(x)}dx.$$

En déduire

$$\forall \lambda > 0, \quad \|R_0(i\lambda)\|_{B(L^2([0,1]))} \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

5. Montrer

$$\forall f \in C^0([0,1]), \forall \lambda, \mu > 0, \quad R_0(i\lambda)f - R_0(i\mu)f = (\lambda^2 - \mu^2) R_0(i\lambda) R_0(i\mu) f,$$

puis

$$\forall \lambda, \mu > 0, \quad R_0(i\lambda) - R_0(i\mu) = (\lambda^2 - \mu^2) R_0(i\lambda) R_0(i\mu).$$

En déduire que $R_0(i\lambda)$ et $R_0(i\mu)$ commutent.

6. Montrer que toute fonction $f \in C_0^2(]0,1[)$ à support compact contenu dans $]0,1[$ et $\mu > 0$,

$$R_0(i\mu)(f'') = \mu^2 R_0(i\mu) f + f.$$

En déduire que

$$\forall f \in L^2([0,1]), \quad \lim_{\mu \to +\infty} \|(i\mu)^2 R_0(i\mu) f - f\|_{L^2([0,1])} = 0.$$

7. Soient $\lambda > 0$ et $f \in L^2([0,1])$ tel que $R_0(i\lambda)f = 0$. En utilisant la question 5, montrer que $R_0(i\mu)f = 0$ pour tout $\mu > 0$. En déduire que pour tout $\lambda > 0$, $R_0(i\lambda) \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ est injectif.
8. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $R_0(i\lambda)$ est un opérateur autoadjoint.
9. Soient $q \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ et Q l'opérateur de multiplication par q,

$$\forall x \in [0,1], \quad (Qu)(x) = q(x)u(x).$$

Montrer que pour tout $\lambda > \|q\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$,

$$R(i\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k R_0(i\lambda) \big(Q R_0(i\lambda)\big)^k$$

définit un opérateur autoadjoint compact et injectif.

10. Montrer que

$$\forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0,1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda) = R_0(i\lambda) - R_0(i\lambda) Q R(i\lambda).$$

En déduire

$$\forall f \in L^2([0,1]), \forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0,1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda)f \in C^0([0,1]),$$

puis

$$\forall f \in C^0([0,1]), \forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0,1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda)f \in C^2([0,1]) \text{ et } [R(i\lambda)f](0) = [R(i\lambda)f](1) = 0.$$

11. Montrer que

$$\forall f \in C^0([0,1]), \forall \lambda > \|q\|_{L^\infty([0,1])}^{\frac{1}{2}}, \quad R(i\lambda)f \in C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1]),$$

et vérifie

$$\forall x \in]0,1[, \quad u''(x) + q(x)u(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

12. Conclure.

Exercice 31 *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*
Soit H un espace de Hilbert séparable, et $T \in B(H)$. On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H telle que $\sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2 < \infty$.

1. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que $\sum_{p\geq 0} \|T^* f_p\| = \sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2$. En déduire que pour toute base hilbertienne $(\widetilde{e}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de H, $\sum_{m\geq 0} \|T\widetilde{e}_m\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2$. On note $\|T\|_{HS}^2$ cette quantité.
2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est continu, de norme $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.
3. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?
4. On considère dans cette question $H = \ell^2(\mathbb{N})$, et on fixe $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$. On définit l'opérateur d'anti-convolution Γ_c par
$$\Gamma_c : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \mapsto \left(\sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p} x_p\right)_{n\in\mathbb{N}} \in H.$$
Montrer que Γ_c est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_{n\geq 0}(n+1)c_n^2 < \infty$.

Exercice 32 *Opérateur à noyau*
On considère l'opérateur intégral
$$T_K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), \quad f \mapsto T_K(f),$$
où $[T_K(f)](x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$ pour presque tout $x \in [0,1]$, et où le noyau est défini par
$$K : [0,1]^2 \to \mathbb{K}, \quad (x,y) \mapsto \min(x,y).$$

1. Montrer que T_K est un opérateur autoadjoint.
2. Montrer que
$$\forall f \in L^2([0,1]), \quad T_K(f) \in C^0([0,1]).$$
3. Soit $\lambda \in \sigma(T_K) \setminus \{0\}$. Justifier que λ est une valeur propre de T_K et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction propre $f \in L^2([0,1])$ associée à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
$$T_K(f) = \lambda f,$$
appartient à l'espace $C^2([0,1])$ et vérifie
$$\forall x \in [0,1], \quad f''(x) + \frac{1}{\lambda} f(x) = 0, \qquad f(0) = f'(1) = 0.$$
4. En déduire
$$\sigma(T_K) = \{0\} \cup \left\{ \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} : k \in \mathbb{N} \right\}$$
et la décomposition spectrale de l'opérateur T_K.
5. Montrer
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} = \|K\|_{L^2([0,1]^2)}^2.$$
6. En déduire
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$