Université de Rennes 1 | Année 2021-2022
Master 1 Mathématiques | Analyse Fonctionnelle

Feuille d'exercices # 1 : Espaces de Banach

Échauffement

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou des nombres complexes.

Exercice 1 *Continuité et noyau*
Soient E un espace vectoriel normé réel ou complexe, et f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f$ est fermé.

Exercice 2 *Une somme directe*
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, soit $f \in E' \setminus \{0\}$ et soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Montrer qu'on a la décomposition en somme directe

$$E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathbb{K}x_0$$

et que la projection sur $\mathbb{K}x_0$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f$ est donnée par $\Pi x = \dfrac{f(x)}{f(x_0)} x_0$, pour tout $x \in E$.

Exercice 3 *Norme d'une forme linéaire continue*
Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $f \in E'$, $f \neq 0$, une forme linéaire continue non nulle et $H = \{x \in E : f(x) = 1\}$. Montrer que

$$\|f\|_{E'} = \frac{1}{d(0_E, H)}.$$

Exercice 4 *Séries convergente*
Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe. Montrer que les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. E est un espace de Banach ;
2. toute série absolument convergente converge dans E, i.e. si $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty$ alors $\exists s \in E$, $\lim_{n\to+\infty} \left\| s - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0$;
3. pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\|x_n\| \leq c^n$ avec $0 < c < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est convergente dans E.

Exercice 5 *L'espace $B(E, F)$*
Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach, les deux sur le même corps $\mathbb{K}$. Montrer $B(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F muni de la norme $\|T\|$ où T est une application linéaire continue, est un espace de Banach.

Exercice 6 *Une suite d'applications*
Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach, les deux sur le même corps $\mathbb{K}$, D

un sous-ensemble dense de E, et $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite de $B(E,F)$ les applications linéaires bornées de E dans F. On suppose que pour tout $x \in D$, la suite $(T_n x)_{n\geq 0}$ converge dans F, et que

$$\sup_{n\geq 0} \|T_n\|_{B(E,F)} < +\infty.$$

Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)_{n\geq 0}$ converge dans F.

Exercice 7 *Ensemble orthogonal*
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, et E' son dual topologique, $E' = B(E,\mathbb{K})$. Si M (resp. N) est un sous-ensemble de E (resp. E'), on définit

$$M^{\perp} = \{f \in E' : \forall x \in M, f(x) = 0\}, \quad {}^{\perp}N = \{x \in E : \forall f \in N, f(x) = 0\}$$

1. Montrer que si $M_1 \subset M_2 \subset E$ alors $M_2^{\perp} \subset M_1^{\perp}$.
2. Montrer que, pour tout $M \subset E$, $M^{\perp} = (\mathrm{Vect(M)})^{\perp}$.
3. Montrer que, pour tout $M \subset E$, $M^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé.
4. Montrer que $E^{\perp} = \{0_{E'}\}$.
5. Montrer que si $N_1 \subset N_2 \subset E'$ alors ${}^{\perp}N_2 \subset {}^{\perp}N_1$.
6. Montrer que, pour tout $N \subset E'$, ${}^{\perp}N = {}^{\perp}(\mathrm{Vect(N)})$.
7. Montrer que, pour tout $N \subset E'$, ${}^{\perp}N$ est un sous-espace vectoriel fermé.
8. Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel M de E, $\overline{M} = {}^{\perp}(M^{\perp})$.
9. Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel N de E', $\overline{N} \subset ({}^{\perp}N)^{\perp}$.
10. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. Montrer que $F \cap G = {}^{\perp}(F^{\perp} + G^{\perp})$, $F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F+G)^{\perp}$, $\overline{F^{\perp} + G^{\perp}} \subset (F \cap G)^{\perp}$ et ${}^{\perp}(F^{\perp} \cap G^{\perp}) = \overline{F+G}$.

Exercice 8 *Noyau et image*
Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $T \in B(E,F)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ T = {}^{\perp}(\mathrm{Im}\ {}^{t}T)$ où ${}^{t}T \in \mathcal{L}(F', E')$ désigne l'application transposée de T, et où l'ensemble orthogonal ${}^{\perp}N$ est défini dans l'énoncé de l'exercice précédent.

Exercice 9 *Les espaces ℓ^p, ℓ^∞ et c_0*
Pour tout $p \in [1,+\infty[$, on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel normé des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\geq 0} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites bornées de nombres réels muni de la norme uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n| < +\infty.$$

Soit $1 \leq p < +\infty$. On note $1 < q \leq +\infty$ son exposant conjugué $1/p + 1/q = 1$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^{(k)} = (e_n^{(k)})_{n\geq 0}$ la suite définie par $e_n^{(k)} = \delta_{n,k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^q(\mathbb{N})$, l'application $T_x : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par

   $$\forall y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^p(\mathbb{N}), \quad T_x y = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n,$$

   est une forme linéaire continue sur $\ell^p(\mathbb{N})$, dont on calculera la norme.

2. On suppose dans cette question que $1 < p < +\infty$. Soient $f \in (\ell^p(\mathbb{N}))'$ et $x_n = f(e^{(n)}) \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq 0$. En calculant $f(y^{(N)})$ avec
$$y^{(N)} = (\mathrm{sgn}(x_0)|x_0|^{q-1}, \mathrm{sgn}(x_1)|x_1|^{q-1}, ..., \mathrm{sgn}(x_N)|x_N|^{q-1}, 0, 0, ...), \quad N \in \mathbb{N},$$
où $\mathrm{sgn}(0) = 0$, montrer que $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^q(\mathbb{N})$ et $f = T_x$. En déduire que l'application linéaire $T_p : \ell^q(\mathbb{N}) \to (\ell^p(\mathbb{N}))'$ définie par $Tx = T_x$ pour tout $x \in \ell^q(\mathbb{N})$, est une isométrie bijective.
3. De même, montrer que l'application linéaire $T_1 : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to (\ell^1(\mathbb{N}))'$ définie par $Tx = T_x$ pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, est une isométrie bijective.
4. Montrer que $\ell^r(\mathbb{N})$ est réflexif pour tout $r \in]1, +\infty[$.
5. Soit $0 < a < 1$. Pour tout $k \geq 1$, on définit $z^{(k)} = (a^{nk})_{n\geq 0}$. Montrer que $z^{(k)} \in \ell^p(\mathbb{N})$ pour tout $k \geq 1$, et que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des $z^{(k)}$ est dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$.
6. Soit $c_0(\mathbb{N})$ l'espace des suites indexées par $\mathbb{N}$ et tendant vers 0 à l'infini muni de la norme uniforme. Montrer que $c_0(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. En déduire que $c_0(\mathbb{N})$ est un espace de Banach. Qu'en est-il de celui des suites presque nulles (i.e. nulles à partir d'un certain rang) ?
7. Montrer qu'il existe $T_0 : \ell^1(\mathbb{N}) \to (c_0(\mathbb{N}))'$ une application linéaire isométrique bijective.
8. Montrer qu'il existe $f \in (\ell^\infty(\mathbb{N}))' \setminus \{0\}$ une forme linéaire continue non nulle sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que $f|_{c_0(\mathbb{N})} = 0$.
9. En déduire que $\ell^1(\mathbb{N})$ n'est pas réflexif.

Les trois principes : de la borne uniforme, de l'application ouverte et du graphe fermé

Exercice 10 *Appartenance à ℓ^2*
Soit $x = (x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes vérifiant $\sum_{n\geq 0} |x_n y_n| < +\infty$, pour toute suite de nombres complexes $y = (y_n)_{n\geq 0}$ telle que $\sum_{n\geq 0} |y_n|^2 < +\infty$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < +\infty$.

Exercice 11 *Continuité sur un espace produit*
Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, et f une forme bilinéaire séparément continue sur l'espace vectoriel produit $E \times E$ muni de la norme $\|(x, y)\|_{E\times E} = \|x\|_E + \|y\|_E$, i.e.,
$$\forall x \in E,\ f(\cdot, x) \in E' \text{ et } f(x, \cdot) \in E'.$$

1. Montrer que f est continue sur $E \times E$ si et seulement si f est continue en $(0, 0)$.
2. Montrer que f est continue sur $E \times E$ si et seulement si il existe $C \geq 0$ telle que
$$\forall x, y \in E, \quad |f(x, y)| \leq C\|x\|_E\|y\|_E.$$
3. Montrer que
$$\sup_{\|y\|_E\leq 1} \Big(\sup_{\|x\|_E\leq 1} |f(x, y)| \Big) < +\infty.$$
En déduire que f est continue sur $E \times E$.

Exercice 12 *Autour des hypothèses du théorème de l'application ouverte*

1. Trouver une application linéaire continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
2. Trouver une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
3. On note E l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ presque nulles muni de la norme uniforme. Trouver une application $T \in B(E, E)$ bijective continue dont l'inverse n'est pas continue.

Exercice 13 *Bases de Schauder*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. On dit qu'un système $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de E si pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} a_k(x) e_k \right\| = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\forall x \in E, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) e_k$$

1. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Schauder.
   (a) Démontrer que $|x| = \sup_{n\geq 0} \|S_n(x)\|$ définit une norme sur E.
   (b) Montrer
   $$\forall 0 \leq n \leq m, \quad S_n \circ S_m = S_n.$$
   (c) Soit $(x_j)_{j\geq 0}$ une famille de vecteurs de E telle que, pour tout $n \geq 0$, la suite $(S_n(x_j))_{j\geq 0}$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ vers y_n quand $j \to +\infty$. Montrer
   $$\exists (b_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \geq 0, \quad y_n = \sum_{k=0}^{n} b_k e_k\,.$$
   (d) Démontrer que $(E, |\cdot|)$ est un espace de Banach.
   (e) Montrer que les normes $|\cdot|$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes.
2. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système de vecteurs de E. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de E si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :
   (i) $\forall n \geq 0, \quad e_n \neq 0\,;$
   (ii) Il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour toute suite de scalaires $(c_k)_{k\geq 0}$ et pour tout $0 \leq n \leq m$,
   $$\left\| \sum_{k=0}^{n} c_k e_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=0}^{m} c_k e_k \right\|$$
   (iii) Le système $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est total, i.e., l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_n est dense dans E.

   Indication : pour la réciproque, on pourra démontrer que l'ensemble
   $$F = \left\{ x \in E : \exists (c_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} c_k e_k \right\| = 0 \right\}$$
   est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice 14 *Applications presque surjectives*
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue presque surjective, i.e.,

$$\exists 0 < \alpha < 1, \exists r > 0, \forall y \in \overline{B_F(0,1)}, \exists x \in \overline{B_E(0,r)}, \quad \|y - T(x)\|_F \leq \alpha.$$

1. Soit $y \in \overline{B_F(0,1)}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de E telle que pour tout $n \geq 1$,
$$x_n \in \overline{B_E(0,r)}, \quad \|y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - ... - \alpha^{n-1} T(x_n)\|_F \leq \alpha^n.$$
2. Montrer
$$\forall y \in \overline{B_F(0,1)}, \exists x \in \overline{B_E\Big(0, \frac{r}{1-\alpha}\Big)}, \quad y = T(x).$$
3. En déduire que T est surjective.
4. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications linéaires continues surjectives de E dans F. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.
5. Application : dans cette question on va démontrer le théorème de prolongement de Tietze :
Théorème de prolongement de Tietze. Soient (X, d) un espace métrique et Y un fermé de X. Toute fonction continue $g : Y \to \mathbb{R}$ admet un prolongement continu $f : X \to \mathbb{R}$, i.e. il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ vérifiant $f|_Y = g$.
On note $C_b(X, \mathbb{R})$ (resp. $C_b(Y, \mathbb{R})$) l'espace des fonctions continues bornées à valeurs réelles définies sur X (resp. Y) muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_{L^\infty(X)}$ (resp. $\|\cdot\|_{L^\infty(Y)}$). On définit T l'application restriction de $C_b(X, \mathbb{R})$ dans $C_b(Y, \mathbb{R})$ définie par
$$\forall f \in C_b(X, \mathbb{R}), \quad T_Y(f) = f|_Y.$$
Soit $g \in C_b(Y, \mathbb{R})$ telle que $\|g\|_{L^\infty(Y)} \leq 1$. On considère la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in X, \quad f(x) = \frac{d(x, Y_-) - d(x, Y_+)}{3(d(x, Y_-) + d(x, Y_+))},$$
où
$$Y_+ = \Big\{y \in Y : \frac{1}{3} \leq g(y) \leq 1\Big\}, \quad Y_- = \Big\{y \in Y : -1 \leq g(y) \leq -\frac{1}{3}\Big\}.$$
   (a) Montrer
   $$\forall g \in C_b(Y, \mathbb{R}), \|g\|_{L^\infty(Y)} \leq 1, \exists f \in C_b(X, \mathbb{R}), \|f\|_{L^\infty(X)} \leq 1, \quad f|_Y = g$$
   (b) On veut montrer que toute fonction $g \in C_b(Y, \mathbb{R})$ vérifiant $|g(y)| < 1$ pour tout $y \in Y$, admet un prolongement continu $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ vérifiant $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$. Soit $g \in C_b(Y, \mathbb{R})$ vérifiant $|g(y)| < 1$ pour tout $y \in Y$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe un prolongement continu $h \in C_b(X, \mathbb{R})$ tel que $\|h\|_{L^\infty(X)} \leq 1$. Si $Z = \{x \in X : |h(x)| = 1\}$ est non vide, on définit
   $$\forall x \in X, \quad f(x) = \frac{d(x, Z)}{d(x, Z) + d(x, Y)} h(x).$$
   Justifier cette définition et conclure
   (c) Démontrer l'énoncé général du théorème de prolongement de Tietze.

Exercice 15 *Une équivalence...*
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$, et $T \in B(E, F)$ une application linéaire continue. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists a > 0, \forall x \in E, \|Tx\|_F \geq a\|x\|_E$.

(ii) T est une application injective et son image $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Exercice 16 *Continuité des opérateur auto-adjoint*
Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, et T une application linéaire de H dans H. On suppose que T est un opérateur auto-adjoint

$$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Montrer que $T \in L(H)$ est continue.

Exercice 17 *Une application continue*
Soit E un espace de Banach réel, et $T : E \to E'$ une application linéaire vérifiant

$$\forall x \in E, \quad [Tx](x) \geq 0.$$

On veut montrer que $T \in \mathcal{L}(E, E')$ est continue.

1. Montrer qu'il suffit d'établir que si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de E convergeant vers 0_E telle que la suite $(Tx_n)_{n \geq 0}$ converge dans E' vers f, alors $f = 0_{E'}$.
2. En déterminant la limite du terme $[Tx_n - Tx](x_n - x)$ quand $n \to +\infty$, montrer que
$$\forall x \in E, \quad |f(x)| \leq [Tx](x).$$
3. Conclure.

Exercice 18 *Une norme équivalente à la norme uniforme*
Soit $E = \mathrm{C}([0,1], \mathbb{C})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et telle que la convergence pour cette norme induit la convergence simple sur $[0,1]$

$$\forall (x_n)_{n \geq 1} : \exists x \in E, \lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0 \Longrightarrow \forall t \in [0,1] \lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t).$$

Montrer que la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur E.

Exercice 19 *Autour des hypothèses du théorème du graphe fermé*
Soient $E = \left(\mathrm{C}^1([0,1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty([0,1])}\right)$, $F = \left(\mathrm{C}([0,1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty([0,1])}\right)$ et soit $T : E \to F$ l'application $f \mapsto Tf = f'$ la dérivée de f. Montrer que E n'est pas un espace de Banach, que T est n'est pas continue (par exemple on pourra considérer $f_n(t) = \sin(nt)$) mais a son graphe fermé.

Autour des théorèmes de Hahn-Banach

Exercice 20 *Formes linéaires complexes*
Soit f une forme linéaire complexe sur E espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (noté aussi $E_{\mathbb{C}}$). Montrer que sa partie réelle $\mathrm{Re} f$ est une forme linéaire réelle sur $E_{\mathbb{R}}$ (E avec sa structure d'espace vectoriel réel) et que pour tout $x \in E$, $f(x) = (\mathrm{Re} f)(x) - \mathtt{i}(\mathrm{Re} f)(\mathtt{i}x)$. Si u est une forma linéaire réelle sur $E_{\mathbb{R}}$ montrer que la fonction définie par, pour tout $x \in E$, $f(x) = u(x) - \mathtt{i}u(\mathtt{i}x)$ définit une forme linéaire complexe sur $E_{\mathbb{C}}$.

Exercice 21 *Existence de prolongements*

1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, A une partie de E, $f : A \to \mathbb{K}$ une fonction et $C > 0$. Montrer qu'il existe $g \in E'$ une forme linéaire continue sur E telle que $g|_A = f$ et $\|g\|_{E'} \leq C$, si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, ..., x_n) \in A^n$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,
$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\Big| \leq C \Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big\|.$$

2. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $(x_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments deux à deux distincts de E, $(a_j)_{j\in J}$ une famille de scalaires et $C > 0$. Montrer qu'il existe $g \in E'$ une forme linéaire continue telle que $g(x_j) = a_j$ pour tout $j \in J$, et $\|g\|_{E'} \leq C$, si et seulement si, pour toute partie finie I de J et toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$,
$$\Big|\sum_{i\in I} \lambda_i a_i\Big| \leq C \Big\|\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\Big\|.$$

Exercice 22 *Dimension du dual topologique*
Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe de dimension infinie. Montrer que son dual topologique E' est de dimension infinie.
Indication : on pourra considérer un sous-espace vectoriel $F \subset E$ de dimension n, puis son dual topologique F' et utiliser le théorème de Hahn-Banach.

Exercice 23 *Ensembles orthogonaux et fermés*
Soient E un espace de Banach, et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. L'objet de cet exercice est de démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) Le sous-espace vectoriel $F + G$ est fermé dans E
- (ii) Le sous-espace vectoriel $F^\perp + G^\perp$ est fermé dans E'
- (iii) $F + G = {}^\perp(F^\perp \cap G^\perp)$
- (iv) $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

Les relations d'orthogonalité ci-dessus sont définies dans l'exercice 7 *Ensemble orthogonal*. On admet l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$, dont on trouvera une démonstration dans le chapitre 2 du livre "Analyse fonctionnelle, Théorie et applications" de H. Brézis.

1. Montrer à l'aide des résultats établis dans l'exercice 7 que les assertions (i) et (iii) sont équivalentes, et que l'assertion (iv) implique l'assertion (ii).
2. On suppose que le sous-espace vectoriel $F + G$ soit fermé dans E.
   (a) Montrer à l'aide des résultats établis dans l'exercice 7 que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. On démontre maintenant l'inclusion inverse $(F \cap G)^\perp \subset F^\perp + G^\perp$.
   (b) Pour tout $f \in (F \cap G)^\perp$, montrer que l'application $\phi_f : F + G \to \mathbb{R}$, où $\phi_f(x) = f(y)$, si $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$, définie bien une application linéaire.
   (c) En utilisant des propriétés géométriques des sous-espaces fermés, montrer que ϕ_f se prolonge en une forme linéaire continue sur E notée $\tilde{\phi}_f \in E'$.
   (d) En utilisant la décomposition $f = (f - \tilde{\phi}_f) + \tilde{\phi}_f$, conclure que l'assertion (i) implique l'assertion (iv).

Exercice 24 *Un sous-ensemble dense pour la norme de L^∞*
Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de

norme uniforme $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$. Montrer que le sous-espace vectoriel $V=\mathrm{Vect}((f_{a_n})_{n\geq 0})$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels strictement plus grands que 1 tendant vers $+\infty$, et

$$\forall n\geq 0, \forall x\in[0,1], \quad f_{a_n}(x)=\frac{1}{x-a_n},$$

est dense dans $(E,\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])})$.

Exercice 25 *Espace ℓ^∞ et théorème de Hahn-Banach*

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire f sur l'ensemble des suites réelles bornées $\ell^\infty(\mathbb{N})$, telle que pour toute telle suite (u_n) on ait $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n \leq f(u) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$.
2. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est le dual de $c_0(\mathbb{N})$, l'espace des suites de limite nulle, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Construire un élément $f\in(\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ tel qu'il n'existe pas $v\in\ell^1(\mathbb{N})$ avec $f(u)=\sum_{n\geq 1} v_n u_n$. Ind. On pourra construire f sur un sous-espace et ensuite prolonger f.

Exercice 26 *Théorème de Hahn-Banach en dimension finie*

1. Soit $d\geq 1$, C un convexe quelconque de $\mathbb{R}^d$ et soit $x\in\mathbb{R}^d\setminus C$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine fermé séparant x et C au sens large. Ind. : On pourra distinguer le cas $x\notin\overline{C}$ et $x\in\overline{C}\setminus C$. Dans le deuxième cas, on essayera d'approcher x par une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^d\setminus C$.
2. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 27 *Intérieur relatif d'un convexe*
Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, et C un sous-ensemble convexe de E.

1. Montrer que l'intérieur $\mathring{C}$ et l'adhérence $\overline{C}$ de C sont des sous-ensembles convexes de E.
2. Si C est un convexe d'intérieur non vide, montrer

$$\forall x\in\mathring{C}, \forall y\in\overline{C}, \quad [x,y[:=\{tx+(1-t)y : 0\leq t<1\}\subset\mathring{C}.$$

3. Si C est un convexe d'intérieur non vide, montrer que $\overline{\mathring{C}}=\overline{C}$.

Si A est une partie non vide de E, l'enveloppe affine engendrée par A, notée $\mathrm{Aff}(A)$, est définie comme l'intersection de tous les sous-espaces affines de E contenant A. Cet ensemble est le plus petit sous-espace affine contenant A, et correspond à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A,

$$\mathrm{Aff}(A)=\Big\{\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j\in E :\ k\geq 1,\ x_j\in A,\ \lambda_j\in\mathbb{K},\ \sum_{j=1}^k\lambda_j=1\Big\}.$$

L'intérieur relatif de A, noté $\mathrm{ri}(A)$, est l'intérieur de A considéré comme sous-ensemble de l'espace métrique $(\mathrm{Aff}(A),\|\cdot\|)$,

$$\mathrm{ri}(A)=\{x\in A : \exists r>0, B(x,r)\cap\mathrm{Aff}(A)\subset A\}.$$

On rappelle que si $B\subset E$ est un sous-ensemble affine non vide alors, pour tout $x\in B$, l'ensemble $E_x=B-x$ est un sous-espace vectoriel de E ne dépendant pas du choix du point $x\in E$. La dimension du sous-espace affine B, notée $\dim(B)$, est définie comme la dimension du sous-espace vectoriel $B-x$, où x est un point quelconque de B

4. Soient C un convexe non vide d'un espace vectoriel normé réel E tel que $n = \dim(\mathrm{Aff}(C)) < +\infty$, et $x_0 \in C$.
   (a) Montrer $\mathrm{Aff}(C) - x_0 = \mathrm{Vect}(C - x_0)$.
   (b) Montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Aff}(C)$ un homéomorphisme tel que $\phi(\Omega) \subset C$, où
   $$\Omega = \Big\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \ \lambda_j > 0, \ 0 < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < 1\Big\}.$$
   (c) En déduire que l'intérieur relatif $\mathrm{ri}(C) \neq \emptyset$ est non vide.

Exercice 28 *Séparation de convexes disjoints en dimension finie*
Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe de A, notée $\mathrm{Conv}(A)$, est définie comme l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E contenant A. Cet ensemble est convexe et correspond à l'ensemble des combinaisons linéaires convexes d'éléments de A,

$$\mathrm{Conv}(A) = \Big\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in \mathbb{R}^n : \ k \geq 1, \ x_j \in A, \ \lambda_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\Big\}.$$

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires convexes d'au plus $n+1$ éléments de A (Théorème de Carathéodory),
   $$\mathrm{Conv}(A) = \Big\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in \mathbb{R}^n : \ 1 \leq k \leq n+1, \ x_j \in A, \ \lambda_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\Big\}.$$
2. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide $\mathring{C} \neq \emptyset$ tel que $0 \notin C$. Nous allons montrer qu'il existe f une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$ (continue) telle que $\forall x \in C, \ f(x) \geq 0$.
   (a) Justifier l'existence de $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de C dense dans C. Indication : on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, il existe f_k une forme linéaire telle que
   $$\forall x \in \mathrm{Conv}(x_1, ..., x_k), \quad f_k(x) \geq 0, \quad \text{et} \quad \|f_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} = 1.$$
   (c) Conclure.
3. Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur vide $\mathring{C} = \emptyset$.
   (a) Montrer que $\dim(\mathrm{Aff}(C)) \leq n - 1$.
   (b) En déduire qu'il existe f une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall x \in C, \ f(x) \geq 0$.
4. Soient E un espace vectoriel normé réel de dimension finie, A et B deux ensembles convexes disjoints non vides de E. Montrer qu'il existe f une forme linéaire non nulle (continue) telle que
   $$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x).$$

Exercice 29 *Théorème de Krein-Milman*
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe, et $K \subset E$ une partie non vide. Une partie non vide A de K est dite partie extrémale de K si

$$\forall x, y \in K, \forall 0 < t < 1, \quad tx + (1-t)y \in A \Rightarrow x, y \in A.$$

Un point $a \in K$ est appelé un point extrémal de K si $\{a\}$ est une partie extrémale de K.

1. Montrer que tout point extrémal d'un ensemble K appartient à sa frontière ∂K.
2. Si E est un espace vectoriel normé uniformément convexe, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \left(\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \delta\right) \Rightarrow \|x - y\| \leq \varepsilon,$$

   montrer que les points extrémaux de la boule unité fermée $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ sont les points de la sphère unité $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$.
3. Montrer que les points extrémaux de la boule unité de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ sont les points $a = (a_n)_{n\geq 0}$ tels que $|a_n| = 1$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas uniformément convexe.
4. On suppose à partir de maintenant que K est une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé réel E.
   (a) Soit $\mathcal{F}_K$ l'ensemble des parties non vides extrémales fermées de K. On ordonne $\mathcal{F}_K$ en prenant comme relation d'ordre l'opposé de l'inclusion

$$A \preceq B \Leftrightarrow A \supset B.$$

   Montrer que $\mathcal{F}_K$ est un ensemble inductif non vide. En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_K$ admet au moins un élément maximal.

   (b) Soient $A \in \mathcal{F}_K$ et $T : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur E. Montrer que

$$B = \left\{x \in A : T(x) = \sup_{y \in A} T(y)\right\}$$

   appartient à $\mathcal{F}_K$.

   (c) En déduire que tout élément maximal de $\mathcal{F}_K$ est une partie réduite à un élément. Conclure que l'ensemble $\mathrm{Ext}(K)$ des éléments extrémaux de K est non vide.

   (d) Montrer que toute partie extrémale fermée non vide de K contient un élément extrémal de K.
5. Montrer que toute partie compacte K de E est contenu dans l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux

$$K \subset \overline{\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(K))} = \overline{\left\{x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j : p \geq 1,\ x_j \in \mathrm{Extr}(K),\ \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1\right\}}.$$

6. En déduire le théorème de Krein-Milman : toute partie convexe compacte K d'un espace vectoriel normé réel E est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux

$$K = \overline{\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(K))}.$$

Toplogies faibles

Exercice 30 *Adhérence et topologie faible*
Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Soit B_E la boule unité fermée de E et S_E la spère unité de E.

1. Montrer que la topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.
2. Montrer que tout voisinage pour la topologie faible de E contient une droite.

3. Soit $x_0 \in E$ tel que tel que $\|x_0\| \leq 1$. Montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte S_E.
4. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que B_E est fermé pour la topologie faible. En déduire que l'adhérence pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ de S_E est B_E.

Exercice 31 *Métrisable ou pas ?*
Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. On suppose que E est métrisable pour la topologie faible. En utilisant l'exercice 30 point 2, montrer qu'il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $x_n \rightharpoonup 0$. Trouver ensuite une contradiction à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus.
2. Une autre méthode : on suppose que la topologie faible est métrisable. Montrer qu'il existe alors une famille dénombrable $A \subset E'$, telle que toute forme linéaire continue sur E s'écrive comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de A. En déduire une contradiction. On pourra utiliser le résultat de cours qui dit que si $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f)$ alors f est combinaison linéaire des f_i, $i = 1, \ldots, n$, où $f_1, \ldots, f_n, f \in E'$.

Exercice 32 *Continuité fort-fort ou faible-faible ou ...*
Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On sait que T est continue fort-fort ssi T est continue faible-faible.

1. Montrer que chacune de ces deux types de continuités est équivalente à T continue fort-faible.
2. Montrer que T est continue faible-fort alors la dimension de l'image de T est finie.

Exercice 33 *Réflexivité et séparabilité de ℓ^∞*
Soit l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme uniforme. Trouver une suite (f_n) de $(\ell^\infty)'$ telle que $\|f_n\|_{(\ell^\infty)'} = 1$ et telle que (f_n) ne possède aucune sous-suite convergente pour la topologie faible. Y-a-t-il contradiction avec le fait que la boule unité fermée de $(\ell^\infty)'$ est faiblement-$\star$ compacte ? Que pouvez-vous en conclure sur ℓ^∞ ?

Exercice 34 *Combiner Krein-Milman et Banach-Alaoglu*

1. On veut montrer qu'il n'existe aucune isométrie entre $\mathrm{L}^1([0,1])$ et le dual topologique dun espace vectoriel normé. Commencer par montrer que la boule unité de $\mathrm{L}^1([0,1])$ n'admet pas de point extrémal et ensuite conclure.
2. Montrer que l'espace $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ tendant vers 0 à l'infini n'est pas isométrique au dual topologique d'un espace vectoriel normé.
3. On veut montrer qu'il n'existe aucune isométrie entre $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ et le dual topologique d'un espace vectoriel normé. On commencera par trouver quels sont les points extrémaux de la boule unité de $\mathrm{C}(([0,1], \mathbb{R})$ et ensuite conclure.

Exercice 35 *Une autre preuve du lemme de Goldstine*
Soit E un espace de Banach et on note $J : E \to E''$ l'application qui à tout $x \in E$ associe $J(x) : E' \to \mathbb{R}$ par $\langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle$.

1. Rappeler pourquoi J est une isométrie et quelle propriété possède $J(E)$ en topologie forte.
2. Quelles sont les formes linéaires continues sur E' pour la topologie faible-$\star$ $\sigma(E', E)$?
3. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible-$\star$ $\sigma(E'', E')$.

Exercice 36 *Espace non-séparable*
Soit E un espace de Banach et supposons qu'il existe une famille d'ouverts de E non-vides, disjoints deux à deux $(O_i)_{i\in I}$ tel que I n'est pas dénombrable. Montrer que E n'est pas séparable.

Exercice 37 *Encore ensembles orthogonaux*
Avec les notations de l'exercice 7, montrer que, pour tout sous-espace vectoriel N de E', $({}^{\perp}N)^{\perp}$ est l'adhérence de N pour la topologie faible-$\star$. En déduire que si E est réflexif, $\overline{N} = ({}^{\perp}N)^{\perp}$.

Exercice 38 *Lemme de Shur pour ℓ^1*
Soit (u^n) une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$ convergeant faiblement vers 0. Pour tout n, on note $u^n = (u^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, $u^n_k \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Soit B la boule unité fermée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, munie de la topologie faible-$\star$. Vérifier que cette topologie est bien engendrée par la distance
$$d(v,w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{|v_j - w_j|}{2^j}$$
et que B est alors un espace métrique compact.
3. Soit $\varepsilon > 0$. On définit $F_n = \{v \in B; \forall m \geq n |\langle v, u^m\rangle|\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n contienne un voisinage de 0.
4. Déduire que dans $\ell^1(\mathbb{N})$, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte.
5. En combinant ce résultat avec celui de l'exercice 30 (adhérence pour la topologie faible), expliquer pourquoi l'application id : $\big(\ell^1(\mathbb{N}), \sigma(\ell^1(\mathbb{N}), \ell^1(\mathbb{N})')\big) \to \big(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\big)$ est séquentiellement continue, mais pas continue.

Exercice 39 *Banach -Alaoglu avec des suites*

1. Soit E un espace vectoriel normé séparable. Démontrer par un procédé d'extraction diagonale que toute suite bornée de E' admet une sous-suite qui converge pour la topologie faible-$\star$.
2. Trouver un contre-exemple dans un espace vectoriel normé non séparable.
3. Montrer que dans un espace non réflexif, on ne peut pas forcément extraire d'une suite bornée une sous-suite faiblement convergente.

Exercice 40 *Convexes fermés fort et non fermés faible-$\star$*

1. Dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, on considère $C = \{u : \liminf_{n\to\infty} u_n \geq 0\}$ Montrer que C est un convexe fermé fort, non fermé faible-$\star$.
2. Soit E un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E' d'une autre forme que $\varphi_x : \ell \mapsto \ell(x)$, où $x \in E$. Montrer que le noyau d'une telle forme est un hyperplan fermé fort, mais pas fermé faible-$-\star$. Indication : On pourra montrer que pour E espace vectoriel normé, les formes linéaires continues sur E' muni de la topologie faible-$\star$, $\sigma(E', E)$ sont les évaluations du type φ_x, $x \in E$ (exercice 35, question 2).

Exercice 41 *Théorème de Eberlein-Smulian*
Le but de cet exercice est de prouver le résultat suivant :
Théorème. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Si A est compacte pour la topologie faible, alors A est séquentiellement (faiblement) compacte.

1. On dit qu'une famille $(\ell_j)_{j\in J} \subset E'$ sépare les points si pour tout $x \in E$, $(\forall j \in J, \ell_j(x) = 0)$ implique $x = 0$. Montrer qu'un espace normé séparable admet une famille dénombrable de formes linéaires continues séparant les points, de norme 1.
2. Montrer que si E admet une famille dénombrable bornée de formes linéaires séparant les points, alors les compacts faibles sont métrisables.
3. On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. On note $F = \overline{Vect\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$ (on ne précise pas si l'adhérence est forte ou faible : pourquoi ?). Montrer que $A \cap F$ est séquentiellement compact dans F pour la topologie faible $\sigma(F, F')$, et conclure.
4. Montrer que ce résultat est faux pour la topologie faible-$\star$.

Exercice 42 *Critère pour montrer quun espace n'est pas réflexif*
Soit E un espace réflexif et soit $f \in E'$, montrer que $\|f\|$ est atteinte.