Maîtrise de Mathématiques 2003-2004
Statistiques
7. Tests statistiques : construire et évaluer

7.1. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta,1)$ et soient $\theta_0 > \theta_1$. Construire le test de Neyman-Pearson pour tester $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contre $\mathrm{A}: \theta = \theta_1$. Indiquer le test de niveau $\alpha \in]0,1[$ pour $\theta = \theta_0$. Application : $\theta_0 = 10$, $n = 25$ et $\alpha = 0{,}05$. Que vaut la puissance de ce test pour $\theta_1 = 9$?

7.2. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta,1)$ et soit θ_0 un réel fixé connu. On veut tester $\mathrm{H}: \theta \leqslant \theta_0$ contre $\mathrm{A}: \theta > \theta_0$.

a) Montrer que le test de rapport de vraisemblance est

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}(\overline{x} - \theta_0) > c \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où c est une constante.

b) Écrire la fonction puissance $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ de ce test et faire son graphe. Montrer que le test est sans biais.

c) On veut que $\beta(\theta_0) = 0{,}1$ et que $\beta(\theta_0 + 1) = 0{,}8$. Montrer qu'alors $c = 1{,}28$ et $n = 5$.

d) On ne fixe plus n. Trouver c pour que le test soit de niveau $\alpha \in]0,1[$ pour $\theta \leqslant \theta_0$. S'agit-il d'un test u.p.p. contre $\theta > \theta_0$?

e) Application : $\theta_0 = 9$, $n = 25$ et $\alpha = 0{,}05$. Que vaut la puissance de ce test en $\theta_1 = 10$?

7.3. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta,1)$ et soit θ_0 un réel fixé connu. On veut tester $\mathrm{H}: \theta \geqslant \theta_0$ contre $\mathrm{A}: \theta < \theta_0$. Montrer que le test de rapport de vraisemblance est

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} < \theta_0 - g_\alpha/\sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où g_α est telle que $\mathrm{P}(G > g_\alpha) = \alpha$, avec G variable gaussienne standard. Écrire la fonction puissance de ce test et montrer que ce test est de niveau α pour $\theta \geqslant \theta_0$ et u.p.p. contre $\theta < \theta_0$.

7.4. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta,1)$ et soit θ_0 un réel fixé connu. On veut construire des tests pour tester $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contre $\mathrm{A}: \theta \neq \theta_0$.

a) On écrit $\{\theta = \theta_0\} = \{\theta \leqslant \theta_0\} \cap \{\theta \geqslant \theta_0\}$. Utiliser l'exercice **7.2** pour construire un test de $\theta \leqslant \theta_0$ contre $\theta > \theta_0$ avec une constante c' et ensuite l'exercice **7.3** pour construire un test de $\theta \geqslant \theta_0$ contre $\theta < \theta_0$ avec une constante c''. En déduire que la région de rejet du test recherché est $\{\sqrt{n}(\overline{x} - \theta_0) > c'\} \cup \{\sqrt{n}(\overline{x} - \theta_0) < c''\}$. Que devient ce test lorsqu'on pose $c' = -c'' > 0$?

b) Construire directement le test du rapport de vraisemblance ϕ et comparer avec le test trouvé au point précédent. Quel est le choix de la constante pour que le test soit de niveau α pour $\theta = \theta_0$.

c) Montrer par calcul direct que ce test satisfait les conditions suivantes $\mathrm{E}_{\theta_0}[\phi(\mathbf{X})] = \alpha$ et $\mathrm{E}_{\theta_0}[\overline{X}\phi(\mathbf{X})] = \alpha\mathrm{E}_{\theta_0}[\overline{X}]$. En déduire par le résultat du cours qu'il s'agit d'un test sans biais de niveau α pour $\theta = \theta_0$ u.p.p. contre $\theta \neq \theta_0$. Dessiner le graphe de sa fonction puissance.

7.5. i) Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$. On suppose que σ^2 est inconnu. Construire les tests de rapport de vraisemblance pour tester respectivement

a) $\mathrm{H}: \theta \leqslant \theta_0$ contre $\mathrm{A}: \theta > \theta_0$;

b) $\mathrm{H}: \theta \geqslant \theta_0$ contre $\mathrm{A}: \theta < \theta_0$;

c) $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contre $\mathrm{A}: \theta \neq \theta_0$.

Préciser ces tests pour qu'ils soient de niveau $\alpha = 0{,}05$ lorsque $n = 25$.

ii)Même questions pour la loi $\mathcal{N}(1,\theta)$.

7.6. Soit $(X_1,\ldots,X_r)$ r-échantillon de loi $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ et $(Y_1,\ldots,Y_s)$ s-échantillon de loi $\mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$. Les deux échantillons sont indépendants.

a) On pose $\theta = (m_1,m_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Construire le test de rapport de vraisemblance pour tester $\mathrm{H}: \theta \in \Theta_0$ contre $\theta \in \Theta_0^c$, où $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$.

b) On suppose cette fois-ci qu'en effet, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$ mais inconnu. Le paramètre sera dans ce cas $\theta = (m_1,m_2,\sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Construire le test de rapport de vraisemblance pour tester $\mathrm{H}: \theta \in \Theta_0$ contre $\theta \in \Theta_0^c$, où $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : m_1 = m_2\}$.

Préciser ces tests pour qu'ils soient de niveau $\alpha = 0{,}1$ lorsque $n = 10$.

7.7. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un n-échantillon de loi normale $\mathcal{N}(0,1/\theta)$.

a) Construire un test de $\theta = 1$ contre $\theta > 1$. Si $n = 15$ et si $\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 6{,}8$, effectuer le test niveau 5% pour $\theta = 1$. Calculer approximativement la puissance de ce test en $\theta = 2{,}3{,}4{,}5$ à l'aide des tables de lois et dessiner la fonction puissance. Ce test est-il u.p.p. contre $\theta > 1$?

b) Construire le test u.p.p. contre $\theta \neq 1$ au niveau 5% pour $\theta = 1$ pour les mêmes données.

7.8. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un n-échantillon de loi de densité

$$f(x,a) = (1/a)\exp(-x/a)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x),\, a > 0.$$

a) Quel est le test u.p.p. contre $a > a_0$ au niveau α pour $a \leqslant a_0$.

b) Calculer approximativement la région de rejet de ce test pour $a_0 = 1$, $n = 50$ et $\alpha = 0{,}05$. Quelle est la puissance au point $a = 2$?

c) Dans les mêmes conditions, si on désire une puissance de 0,95 pour la contre $a = 2$, quelle taille d'échantillon faut-il prévoir?

7.9. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On observe un n-échantillon de loi de densité

$$f(x,p) = p^2 x \exp(-px)\mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

a) Quel est le test le plus puissant contre $p = p_1$ de niveau α pour $p = p_0$?

b) Quel test proposez-vous pour tester $p = p_0$ contre $p > p_0$ ou $p \neq p_0$?

7.10. On nourrit 20 petits cochons: la moitié d'entre eux reçoivent leur ration de protéines sous forme de cacahuètes crues et l'autre sous forme de cacahuètes grillées. On veut savoir si le fait de griller les cacahuètes a un effet sur l'augmentation de poids des petits cochons. L'augmentation du poids (en centaines de grammes) des animaux mesurée au bout d'une semaine est (première ligne pour le cas "crues", x, la deuxième pour le cas "grillées", y):

$$\begin{pmatrix} 62 & 56 & 61 & 58 & 60 & 44 & 56 & 60 & 56 & 63 \\ 53 & 51 & 62 & 55 & 59 & 56 & 61 & 54 & 47 & 57 \end{pmatrix}.$$

a) Tester l'égalité des variances dans les deux échantillons au niveau 5%. Préciser les hypothèses.

b) En "acceptant" l'égalité des variances, peut-on considérer que le fait de griller les cacahuètes a une influence sur la croissance des petits cochons (on fera un test au niveau 5%).