Maîtrise de Mathématiques 2003-2004
Statistiques

6. Intervalles de confiance

6.1. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi P_θ, $\theta \in \Theta$. Trouver des fonctions pivotales et ensuite déduire des intervalles (ou régions) de confiance de coefficient de sécurité $1-\alpha \in [0,1]$ pour le paramètre θ.

a) $\Theta = \mathbb{R}$ et $\mathrm{P}_\theta = \mathcal{N}(\theta,1)$ (loi normale avec variance connue);

b) $\Theta = \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{P}_\theta = \mathcal{N}(0,\theta^2)$ (loi normale avec espérance connue);

c) $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{P}_\theta = \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ (loi normale);

d) $\Theta = \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$ (loi exponentielle).

6.2. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi uniforme sur $[0,\theta]$, $\theta \in \Theta$. Trouver une fonction pivotale et ensuite indiquer un intervalle de confiance pour θ de coefficient de sécurité $1-\alpha \in [0,1]$.

6.3. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi P_θ, $\theta \in \Theta$. Trouver des intervalles de confiance asymptotiques pour θ de coefficient de sécurité $1-\alpha \in [0,1]$.

a) $\Theta = [0,1]$ et $\mathrm{P}_\theta = \mathcal{B}(1,\theta)$ (loi de Bernoulli);

b) $\Theta = \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{P}_\theta = \mathcal{P}(\theta)$ (loi de Poisson).

6.4. Soit $((X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n))$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$.

a) On suppose que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (inconnues) et on veut trouver un intervalles de confiance de coefficient de sécurité $1-\alpha \in [0,1]$ pour le paramètre $\theta = m_1 - m_2$. On pourra d'abord indiquer la loi de la fonction pivotale

$$T_n(\theta) = \left[(\overline{X} - \overline{Y}) - \theta\right] / \sqrt{S_X^2 + S_Y^2}.$$

b) On ne suppose plus l'égalité des variances et on veut trouver un intervalles de confiance de coefficient de sécurité $1-\alpha \in [0,1]$ pour le paramètre $\tau = \sigma_1^2/\sigma_2^2$. On pourra d'abord indiquer la loi de la fonction pivotale

$$T_n(\tau) = \tau \, \frac{S_{0,X}^2}{S_{0,Y}^2}.$$

6.5. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta,1)$ (voir aussi l'exercice **6.1.a**). Montrer que l'intervalle aléatoire $[\overline{X}-1,\overline{X}+1]$ contient θ avec une probabilité qu'on calculera. Cette probabilité dépend-t-elle de n? Trouver ensuite le plus petit n pour garantir un intervalle de confiance pour θ de longueur au plus $1/4$ de coefficient de sécurité 0,95. Si on suppose que la loi est $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$, avec σ^2 inconnu, trouver le plus petit n pour garantir un intervalle de confiance pour θ de longueur au plus $\sigma/4$ de coefficient de sécurité 0,90.

6.6. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi uniforme sur $[0,\theta]$, $\theta \in \Theta$ et soit $X_n = \max\{X_1,\dots,X_n\}$ (voir aussi l'exercice **6.2**). On veut construire deux types d'intervalles aléatoires contenant θ : $[aX_n,bX_n]$, $1 \leqslant a < b$ et $[X_n+c,X_n+d]$, $0 \leqslant c < d$. Calculer

$\mathrm{P}_\theta(\theta \in [aX_n, bX_n])$ ainsi que $\mathrm{P}_\theta(\theta \in [X_n + c, X_n + d])$. Lequel préférer?

6.7. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où les deux paramètres sont inconnus. Trouver un intervalle de confiance de coefficient de sécurité $1 - \alpha$, pour σ^2 en termes de deux constantes $a,b > 0$ (voir aussi l'exercice **6.1 b**). Trouver les conditions qui doivent satisfaire a et b pour que l'intervalle soit le plus court possible. Donner ensuite les valeurs de a et b lorsque $\alpha = 0{,}1$ et $n = 3$. Comparer l'intervalle obtenu avec celui qu'on trouve en utilisant les le réel $y_{\alpha/2}$ tel que $\mathrm{P}(Y > y_{\alpha/2}) = \alpha/2$, $Y \sim \chi^2(n-1)$.

6.8. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{B}(1, \theta)$. Reprendre la partie a) de l'exercice **6.3** en utilisant la quantité $\theta(1-\theta)$ a la place de $\overline{X}(1-\overline{X})$ pour rechercher l'intervalle de confiance.

6.9. Soient $a,b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que $a(\mathbf{x}) \leqslant b(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x}$, et $\mathrm{P}_\theta(a(\mathbf{X}) \leqslant \theta) = 1 - \alpha_1$ et $\mathrm{P}_\theta(b(\mathbf{X}) \geqslant \theta) = 1 - \alpha_2$. Calculer $\mathrm{P}_\theta(a(\mathbf{X}) \leqslant \theta \leqslant b(\mathbf{X}))$.

6.10.

a) Un échantillon aléatoire de 10 prélévements indépendants est tiré d'une population distribuée suivant une loi normale. Les valeurs sont :

$$1{,}19;\ 1{,}08;\ 1{,}18;\ 1{,}13;\ 1{,}16;\ 1{,}20;\ 1{,}15;\ 1{,}13;\ 1{,}10;\ 1{,}14.$$

Calculer l'intervalle de confiance au niveau 5% de l'espérance et de la variance de la population.

b) Une expérimentation sur les globulines a donné les résultats suivants :

centres des classes : 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26

effectifs des classes : 2; 6; 13; 17; 17; 38; 10; 17; 6; 5; 2.

Calculer l'intervalle de confiance au niveau 5% de l'espérance et de la variance de la population (distribuée suivant une loi normale).

6.11. Sur 4000 naissances une enquête relève 2065 garçons. Donner un intervalle de confiance pour la proportion de garçons, au niveau 5% et 1%.

6.12. On a fait un sondage auprès de 900 personnes sur une possible modification de la Constitution. Les opinions favorables représentaient 40,1% des réponses.

a) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance 95% pour la probabilité d'une réponse favorable.

b) À la suite d'une intense campagne d'explication en faveur de cette modification on va de nouveau faire un sondage, mais avec pour objectif l'évaluation de l'efficacité de la campagne et non l'estimation de la proportion de personnes favorables. La campagne aura été *vraiment efficace* si l'opinion favorable est devenue majoritaire. Combien de personnes devra-t-on interroger si on veut différencier avec des risques de 5% les situations: "la campagne n'a eu aucune efficacité" contre "la campagne a été *vraiment efficace*"?