Maîtrise de Mathématiques 2003-2004
Statistiques
2. Convergence des variables aléatoires réelles

2.1. On considère l'espace de probabilité $([0{,}1],\mathcal{B}_{[0,1]},\lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue. Toutes les variables aléatoires seront définies sur cet espace de probabilité. Rappel :

$$\begin{array}{ccccc} \text{convergence p.s.} & \Longrightarrow & \text{convergence en prob.} & \Longrightarrow & \text{convergence en loi} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{convergence dans } \mathrm{L}^2 & & \end{array}$$

a) Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ en probabilité et que X_n ne converge pas vers 0 presque sûrement, quand $n \to \infty$.

b) Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ dans L^1 mais pas dans L^2, quand $n \to \infty$.

c) Montrer que, de toute suite $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ en probabilité, on peut extraire une sous-suite $\{X_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_{n_k} \to 0$ presque sûrement, quand $k \to \infty$.

d) Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ presque sûrement et que X_n ne converge pas vers 0 dans L^1.

e) Montrer que si X est presque sûrement constante c, alors la convergence en probabilité de la suite $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ vers X équivaut à la convergence en loi de cette suite vers X.

2.2. Soient $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ des suites de variables aléatoires et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Toutes les convergences sont pour $n \to \infty$.

a) Montrer que si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ presque sûrement (resp. en probabilité), alors $g(X_n,Y_n) \to g(X,Y)$ presque sûrement (resp. en probabilité).

b) Si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ en probabilité, alors $X_n+Y_n \to X+Y$, $aX_n+bY_n \to aX+bY$ (a,b constantes), $X_nY_n \to XY$ et enfin, lorsque $\mathrm{P}(Y_n \neq 0) = \mathrm{P}(Y \neq 0) = 1$, $X_n/Y_n \to X/Y$ en probabilité.

c) Si $X_n \to X$ en loi et et $Y_n \to c$ en probabilité alors

i) $X_n + Y_n \to X + c$ en loi;

ii) $X_nY_n \to cX$ en loi;

ii) $X_n/Y_n \to X/c$ en loi, dès que $\mathrm{P}(Y_n \neq 0) = 1$ et $c \neq 0$.

2.3. Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires d'espérance m et de variance σ^2. On pose $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

a) Calculer les limites en probabilité et presque sûres de $\bar{X}$ et de S^2, quand $n \to \infty$.

b) Montrer que $\frac{n}{n-1}\frac{S^2}{\sigma^2} \to 1$, en probabilité et presque sûrement, quand $n \to \infty$.

c) Calculer la limite, quand $n \to \infty$, de la suite de fonctions

$$G_n(x) = \mathrm{P}\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sigma} \leqslant x\right], x \in \mathbb{R}$$

De quel type de convergence s'agit-il?

d) Montrer que $\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{S^2}}(\bar{X} - m) \to \mathcal{N}(0{,}1)$ et $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}(\bar{X} - m) \to \mathcal{N}(0{,}1)$ en loi, quand $n \to \infty$.

Remarque: on peut montrer que la convergence du point **c)** *est uniforme en $x \in \mathbb{R}$ (résultat admis).*

2.4.

- **i)** Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec ϕ' continue en un point $a \in \mathbb{R}$. Soient $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de réels, non-nuls, telle que $c_n \to \infty$, et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires telle que $c_n(X_n - a) \to X$ en loi, quand $n \to \infty$. Montrer que $c_n(\phi(X_n) - \phi(a)) \to \phi'(a)X$ en loi, quand $n \to \infty$.
- **ii)** Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires d'espérance m et de variance σ^2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec dérivée continue au point m. Montrer que $\sqrt{n}[g(\bar{X}) - g(m)] \to \mathcal{N}(0,[\sigma g'(m)]^2)$, en loi quand $n \to \infty$.

2.5.

- **a)** Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées de variance σ_n^2, telles que $\sigma_n^2 \to 0$. Montrer que $X_n \to \delta_0$ en loi.
- **b)** Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi commune Q. Montrer que, presque sûrement, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i} \to Q$ en loi.
- **c)** Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{k/n}$ converge en loi vers la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, quand $n \to \infty$.
- **d)** Énoncer le théorème de Lévy sur la convergence en loi.
- **e)** Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes de lois respectivement $\mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2)$. On suppose que $m_n \to m$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$. Montrer que $X_n \to \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ en loi.
- **f)** Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_n \to Q$ en loi. On suppose que la loi Q ne charge pas les points : $Q(\{x\}) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tous $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$, $\mathrm{P}(X_n \in [a,b]) \to Q([a,b])$ et $\mathrm{P}(X_n \in]a,b[) \to Q(]a,b[)$.

2.6.

- **a)** Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires de lois binomiales, telles que $X_n \sim \mathcal{B}(n,p_n)$, avec $p_n \to 0$ et $np_n \to \lambda$ quand $n \to \infty$. Montrer que pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathrm{C}_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
- **b)** Soit $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$. Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi commune $\mathcal{B}(1,p)$ et on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Utiliser la remarque de la fin de l'exercice **2.3** pour montrer que pour $-\infty < a < b < \infty$ on a $\mathrm{P}(a < S_n \leqslant b) \approx \Phi(b^*) - \Phi(a^*)$, où $a^* = (a-np)/\sqrt{np(1-p)}$ et $b^* = (b-np)/\sqrt{np(1-p)}$.
- **c)** Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi commune $\mathcal{P}(\lambda)$. Utiliser la remarque de la fin de l'exercice **2.3** pour montrer que pour $-\infty < a < b < \infty$ on a $\mathrm{P}(a < S_n \leqslant b) \approx \Phi(b^*) - \Phi(a^*)$, où $a^* = (a-n\lambda)/\sqrt{n\lambda}$ et $b^* = (b-n\lambda)/\sqrt{n\lambda}$.
- **d)** Soit une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, ayant des densités $f_n(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{x=1-1/n\}} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{x=1+1/n\}}$. Montrer que X_n converge en loi, mais que la suite des densités f_n ne converge pas vers une densité de probabilité.