Maîtrise de Mathématiques 2003-2004
Statistiques
**1. Lois de probabilité**

**1.1.** (*lois normale, de Cauchy et log-normale*)

Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ et on note $f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$, pour $x \in \mathbb{R}$.

**a)** Prouver que $f_{m,\sigma^2}$ est une densité de probabilité. Il s'agit de la *loi normale* de paramètre $(m,\sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, notée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

**b)** Calculer $\max_{x\in\mathbb{R}} f_{m,\sigma^2}(x)$ et $\lim_{|x|\to\infty} f_{m,\sigma^2}(x)$. Tracer sur le même dessin les courbes des densités $f_{0,\frac{1}{4}}$, $f_{0,1}$ et $f_{0,4}$.

**c)** Calculer $\mathrm{E}(e^{-rX})$, $r \in \mathbb{R}$, si $X$ admet $f_{m,\sigma^2}$ comme densité. En déduire $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$.

**d)** La fonction de répartition de la *variable gaussienne standard* $Z$ de densité $f_{0,1}$ est tabulée. Soit $X$ comme au point précédent. Calculer à l'aide de ces tables $\mathrm{P}(1 < X < 8)$, lorsque $m = 5$ et $\sigma = 2$. Trouver $g > 0$, tel que $\mathrm{P}(|Z| > g) = 0{,}1$.

**e)** On continue de supposer $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\sigma > 0$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Exprimer en termes de $Z$ la probabilité $p_k = \mathrm{P}(|X - m| \leqslant k\sigma)$ et donner les valeurs pour $k = 1,2,3,4$.

**f)** Soient $Z_1$ et $Z_2$ deux variables aléatoires gaussiennes standard et indépendantes. Montrer que le quotient $Z_1/Z_2$ est une variable aléatoire de *loi de Cauchy*.

**g)** On continue de supposer $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et on pose $Y = e^X$. Trouver la densité de la variable $Y$ (de *loi log-normale*). Tracer le graphe de cette densité de paramètres $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $(1,\frac{1}{2})$.

**h)** Montrer que si $Y$ est de loi log-normale alors $\mathrm{E}(Y) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$, $\mathrm{E}(Y^2) = e^{2m+2\sigma^2}$ et $\mathrm{Var}(Y) = e^{2m}(e^{\sigma^2} - 1)$.

**i)** Enfin, soit $Y$ comme aux deux points précédents. Trouver la loi de $1/Y$.

**1.2.** (*loi gamma, de chi-deux, de Fisher et de Student*)

Soient $p,\lambda > 0$ et $f_{p,\lambda}(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x\geqslant 0}$, où $\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.

**a)** Prouver que $f_{p,\lambda}$ est une densité de probabilité. Il s'agit de la *loi gamma* de paramètre $(p,\lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, notée $\gamma_{p,\lambda}$.

**b)** Tracer les courbes des densités $f_{1,1}$, $f_{2,1}$, $f_{4,1}$, ainsi que $f_{2,2}$, $f_{2,1}$ et $f_{2,\frac{1}{2}}$.

**c)** Calculer $\mathrm{E}(e^{-rX})$, $r \geqslant 0$, si $X$ admet $f_{p,\lambda}$ comme densité. En déduire $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$.

**d)** Soient $X_1, \ldots, X_k$, variables aléatoires indépendantes de lois $\gamma_{p_1,\lambda}, \ldots, \gamma_{p_k,\lambda}$, respectivement. Montrer que la loi de leur somme est $\gamma_{p_1+\ldots+p_k,\lambda}$.

**e)** Soient $Z_1, \ldots, Z_d$, variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Montrer que la loi de $Y = Z_1^2 + \ldots + Z_d^2$ est $\gamma_{\frac{d}{2},\frac{1}{2}}$, qui est *la loi de chi-deux à $d$ degrés de liberté* $\chi^2(d)$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{E}(Y^2)$, $\mathrm{Var}(Y)$. Trouver, à l'aide des tables, $a,b > 0$ tels que $\mathrm{P}(Y < a) = \mathrm{P}(Y > b) = 0{,}05$, pour divers valeurs de $d$.

**f)** Étudier la régularité de la densité de la loi $\chi^2(d)$. Pour quelle argument cette densité est-elle maximum? Trouver un équivalent de ce maximum quand $d \to \infty$.

**g)** Montrer que $(Y - d)/\sqrt{2d}$ converge en loi, lorsque $d \to \infty$, vers une loi gaussienne standard.

**h)** Soit $W \sim \mathcal{N}_d(m,K)$ une variable aléatoire gaussienne $d$-dimensionnelle, d'espérance $m$ et de matrice de covariance $K$. Montrer que la variable $Q(W) = (W-m)^*K^{-1}(W-m)$ suit la loi $\chi^2(d)$.

**i)** Soient les variables aléatoires indépendantes $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(d)$. On pose $T = Z/\sqrt{Y/d}$. La loi de la variable aléatoire $T$ est une *loi de Student à $d$ degrés de liberté*. Trouver la densité de $T$. Calculer $\mathrm{E}(T)$, $\mathrm{E}(T^2)$, $\mathrm{Var}(T)$. Calculer la limite de la densité de $T_d$, lorsque $d \to \infty$. Trouver, à l'aide des tables et pour divers valeurs de $d$, $t > 0$, tel que $\mathrm{P}(|T| > t) = 0{,}1$.

**j)** Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes de lois $\chi^2(d_1)$ et $\chi^2(d_2)$. On pose $F = (X_1/d_1)/(X_2/d_2)$. La loi de la variable aléatoire $F$ est une *loi de Fisher de paramètre* $(d_1,d_2)$, notée $\mathcal{F}(d_1,d_2)$. Trouver la densité de $F$. Quelle est la loi de $1/F$? Calculer $\mathrm{E}(F)$, $\mathrm{E}(F^2)$, $\mathrm{Var}(F)$. Trouver, à l'aide des tables, $a,b > 0$ tels que $\mathrm{P}(F < a) = \mathrm{P}(F > b) = 0{,}05$ pour $d_1 = 5$ et $d_2 = 6$.

**k)** Soit $T$ une variable aléatoire de loi de Student à $d$ degrés de libertés. Quelle est la loi de $dT^2$?

**l)** La loi de Cauchy est-elle un cas particulier d'une des lois de cet exercice?

**1.3.** (*lois gamma, beta, arcsinus et de Cauchy*)

**a)** Soient $p,q,\lambda > 0$. Désignons par $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\gamma(p,\lambda), \gamma(q,\lambda)$. Trouver la densité du vecteur aléatoire $(U,V) := (X+Y, X/(X+Y))$.

**b)** Les variables aléatoires $U$ et $V$ sont-elles indépendantes? On dit que $V$ suit une *loi beta* notée $\mathrm{B}(p,q)$.

**c)** Soit $V \sim \mathrm{B}(1/2,1/2)$. On dit que V est une variable aléatoire de *loi arcsinus*. Prouver que la variable aléatoire $1/V$ a la même loi que la variable aléatoire $1 + C^2$, où $C$ suit une loi de Cauchy.

**d)** Soit $X \sim \gamma(1,1)$ et $V \sim \mathrm{B}(1/2,1/2)$ deux variables indépendantes ($X$ est de loi exponentielle de paramètre 1). Montrer que : $2XV \sim G^2$, où $G$ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

**e)** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ et on note $f_{\alpha,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{\sigma^2}} \frac{1}{1+\frac{(x-\alpha)^2}{\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Prouver que $f_{\alpha,\sigma^2}$ est une densité de probabilité. Il s'agit de la *loi de Cauchy* de paramètre $(\alpha,\sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, notée $\mathcal{C}(\alpha,\sigma^2)$.

**f)** Si $C \sim \mathcal{C}(0,1)$, montrer que $\mathrm{E}(e^{itC}) = e^{-|t|}$ et que $D = \alpha + \sigma C \sim \mathcal{C}(\alpha,\sigma^2)$. Montrer que $\mathrm{E}(e^{itD}) = e^{-it\alpha-\sigma|t|}$. L'espérance de $D$ est-elle définie?

**f)** Si $D \sim \mathcal{C}(\alpha,\sigma^2)$ et $E \sim \mathcal{C}(\beta,\tau^2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $D + E \sim \mathcal{C}(\alpha+\beta,(\sigma+\tau)^2)$.

**1.4.** Soient $X_1,\ldots,X_n$, $n$ variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ et $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$. Montrer que $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m,\frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{n}{\sigma^2}S_n^2 \sim \chi^2(n-1)$ et que ces variables aléatoires sont indépendantes.