Université de Rennes — L3 Mathématiques
Intégration de Lebesgue — année 2024-2025

Feuille d'exercices # 5

Exercice 1 *Inversion de sommes et calcul d'intégrale*

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy)dy.$$
En déduire que $x \mapsto \sin(x)/x$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$

Exercice 2 *Pourquoi faire simple...*

En étudiant sa dérivée, déterminer une expression plus simple de la fonction suivante :
$$t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x} e^{-tx} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 3 *Inégalité de corrélation*

Sur un espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, soient f et g deux fonctions intégrables et telles que fg est encore intégrable. On suppose de plus que f et g sont monotones et de même monotonie. Démontrer l'inégalité :
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu(x) \geq \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} g(x)d\mu(x).$$

Exercice 4 *Transformée de Fourier*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable (i.e. $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$). On définit la transformée de Fourier de f par :
$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ définit une application linéaire continue.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, notons $\tau_a : f \mapsto f(\cdot - a)$. Montrer que $\mathcal{F}\left(\tau_a f\right)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$.
3. Montrer le lemme de Riemann–Lebesgue : $\mathcal{F}f(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $\mathcal{F}f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $h = f * g$. Montrer que $\mathcal{F}h = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

Exercice 5 *Transformée de Fourier encore*

On souhaite expliciter la transformée de Fourier suivante, pour $t \in \mathbb{R}$
$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-itx}\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En intégrant par parties l'expression obtenue, montrer que F vérifie l'équation différentielle linéaire suivante $F'(t) = -tF(t)$.
3. Expliciter la fonction F, que remarquez-vous ?

Exercice 6 *Intégration par parties*
Soient $f, g \in L^1([a,b])$. Montrer que, en notant $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)G(t)\mathrm{d}t = F(b)G(b) - \int_a^b F(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 7 *Variante de l'inégalité de Hölder*
Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$. Montrer que $fg \in L^r(\mu)$ et :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice 8 *Inclusions*
(i) Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$. L'inclusion est-elle stricte ?
(ii) Donner un exemple de fonction appartenant à tout L^p, mais pas à L^∞ sur $\mathbb{R}$.
(iii) Soient $p \neq q$. Montrer que $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ ne sont pas comparables (i.e. ni $L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$, ni $L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$).
(iv) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que $L^p(E) \cap L^q(E) \subset L^r(E)$ si $1 \leq p \leq r \leq q < +\infty$. En déduire que, pour f donnée, l'ensemble $\{p \in [1, +\infty[, f \in L^p(E)\}$ est un intervalle.

Exercice 9 *Espaces de suites*
Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure de comptage :

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty \right\}.$$

Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ si $p \leq q$. L'inclusion est-elle stricte ?

Exercice 10 *Limite quand $p \to \infty$*
Montrer que si $\mu(E) < \infty$ et si f est une fonction bornée, alors on a $\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$. La suite des normes est-elle monotone ?

Exercice 11 *Limite quand $p \to 0$*
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ avec μ une mesure de probabilité et f une fonction positive intégrable. Montrer que si $\mu(\{f > 0\}) < 1$ alors $\lim_{p \to 0^+} \|f\|_p = 0$. Montrer que $\lim_{p \to 0^+} \int_E f^p d\mu = \mu(\{f > 0\})$.

Exercice 12 *Inégalité de Hardy*
Soit $p \in]1, +\infty[$. À toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on associe $F : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que l'inégalité de Hardy ci-dessous est vérifiée pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$:

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$$

Indication : on commencera par vérifier la bonne définition des objets en jeu, puis par montrer, pour $f \in \mathcal{C}_c\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+\right)$:

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p \, \mathrm{d}x \leq \frac{p}{p-1} \int_0^{+\infty} f(x) F(x)^{p-1} \, \mathrm{d}x$$

Justifier que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale. Que dire dans les cas $p = 1$ et $p = +\infty$?