Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Master et Magistère Mathématiques 1ères années
Année 2010 - 2011

Probabilités de base : examen

mercredi 1er juin 2011 - durée 2 heures - aucun document autorisé

Exercice I.

La probabilité qu'une pièce montre pile lors d'un lancer est $p \in]0,1[$. On lance cette pièce $n \geqslant 1$ fois et on note respectivement P et F les nombres de piles et de faces obtenus lors de ces lancers.

1. On fixe n, le nombre de lancers.
   (a) Quelles sont les lois de P et de F ? Que vaut $P + F$?
   (b) Calculer $G_{P,F}(s,t) = \mathrm{E}[s^P t^F]$. En déduire $G_P(s) = \mathrm{E}[s^P]$ et $G_F(t) = \mathrm{E}[t^F]$.
   (c) Les variables aléatoires P et F sont-elles indépendantes ?
2. On fait varier n et on notera les variables P et F par P_n et F_n.
   (a) Justifier pourquoi P_n/n tend en probabilité vers une valeur qu'on précisera lorsque $n \to +\infty$.
   (b) En déduire que
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(2p - 1 - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n}(P_n - F_n) \leqslant 2p - 1 + \varepsilon\right) = 1.$$
   Indication. Utiliser la valeur de la somme $P_n + F_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier,
   $$\mathrm{E}\left[\frac{1}{1+P_n}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$
   Indication. On pourra utiliser l'égalité $\frac{1}{1+P_n} = \int_0^1 s^{P_n} ds$.
4. On suppose enfin que $p = {}^{\lambda}\!/_{n}$ $(0 < \lambda < n)$.
   (a) Montrer que P_n converge en loi, lorsque $n \to +\infty$, vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.
   (b) Calculer de deux manières différentes $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{1+P_n}\right]$.

Exercice II.

Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. On s'intéresse à $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n.
2. Calculer l'espérance de M_n et sa limite.
   Indication : On utilisera une expression de l'espérance en fonction de la fonction de répartition.
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(M_n < 1 - 1/\sqrt{n}) < +\infty$.
4. En déduire que, presque sûrement, pour n assez grand, on a $M_n \geqslant 1 - 1/\sqrt{n}$.
5. Conclure que le maximum de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$ tend presque sûrement vers 1.

Tournez la page S.V.P.

Exercice III.

Soit $\rho \in (-1, 1)$ une constante réelle. Considérons le couple aléatoire (X, Y) de densité sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

1. Montrer que les variables X et Y sont de même loi (on pourra chercher leurs densités) et que leur coefficient de corrélation est ρ.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X et Y soient indépendantes.
3. Montrer que les variables X et $Z = {}^{(Y-\rho X)}/_{\sqrt{1-\rho^2}}$ sont indépendantes et de même loi.
4. En déduire que

   $$\mathrm{P}(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

   Indication. On montrera que

   $$\mathrm{P}(X > 0, Y > 0) = \int_0^{+\infty} \int_{-\rho x/\sqrt{1-\rho^2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2}\right) dxdz$$

   et on fera un changement de variable dans l'intégrale

   $$\int_{-\rho x/\sqrt{1-\rho^2}}^{0} \exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2}\right) dz.$$

5. Supposons que X et Y sont non-corrélées. Calculer de deux façons $\mathrm{P}(X > 0, Y > 0)$.