Probabilités de base : examen de rattrapage

mercredi 16 juin 2010 - durée 2 heures - tout document interdit

Exercice I.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{x\geqslant 0}$.

1. Trouver la densité de la variable aléatoire $Z = X - Y$. S'agit-il d'une loi remarquable ?
2. Que valent les fonctions caractéristiques φ_X, φ_Y de X et Y.
   En déduire la fonction caractéristique de Z (ne pas faire de calcul d'intégrale).
3. Trouver la fonction de répartition de Z. Calculer l'espérance et la variance de Z.
4. Soit $W \sim \mathcal{U}_{[0,e^2-1]}$ une variable aléatoire indépendante du couple (X, Y). Dire pourquoi W est indépendante de Z. Montrer que $\mathrm{Var}(Z) = (e^2 - 1)\mathrm{E}(e^{-W|Z|})$ (on pourra calculer l'espérance du membre de droite).

Exercice II.

Soit G une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite. Pour tout $a > 0$ on note $N_a := -G\mathbb{1}_{\{|G|\leqslant a\}} + G\mathbb{1}_{\{|G|>a\}}$.

1. Montrer que N_a est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite.
2. Prouver que le couple (G, N_a) n'est pas gaussien.
3. Y a-t-il une valeur de a telle que la matrice de covariance de (G, N_a) soit l'identité ?

Exercice III.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots\}$ et de même loi donnée par la suite $p_n = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

1. Identifier la loi commune et calculer sa fonction caractéristique.
2. Calculer pour tout t réel, $\mathrm{P}(S > t)$. En déduire la loi de $\min\{S, T\}$.
3. Calculer $\mathrm{P}(S = rT)$ pour un rationnel positif r. En déduire la valeur de $\mathrm{P}(S \text{ divise } T)$.
   Que valent $\mathrm{P}(S > T)$ et $\mathrm{P}(S < T)$?

Exercice IV.

Soient $c > 0$ et $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in]0, 1[,\ 0 < f(x) \leqslant cg(x)$.

1. Soit $\{U_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Justifier la convergence p.s. et préciser les valeurs des limites des suites $X_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(U_j)$ et $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n g(U_j)$, $n \geqslant 1$.
2. Calculer les limites en probabilité des suites $\{\frac{1}{Y_n}\}_{n\geqslant 1}$ et $\{\frac{X_n}{Y_n}\}_{n\geqslant 1}$.
3. Justifier la convergence et calculer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\frac{X_n}{Y_n})$.
4. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n \text{ fois}} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{g(x_1) + \ldots + g(x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n\,.$$
   Application : $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$.