Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Magistère Mathématiques 1ère année
Année 2008 - 2009

Probabilités de base : examen

mardi 5 mai 2009 - durée 2 heures - résumé autorisé

Exercice I.

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance l'identité et $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \neq (0,0)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Trouver les lois des variables aléatoires $Y := {}^{(a_1X_1+a_2X_2)}/_{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$ et $Z := {}^{(X_1+X_2X_3)}/_{\sqrt{1+X_3^2}}$. On pourra utiliser les fonctions caractéristiques.

Exercice II.

Les durées de vie T_1 et T_2 de deux appareils sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Que valent les fonctions de répartition et les densités des variables aléatoires $T_{(1)} := \min\{T_1, T_2\}$ et $T_{(2)} := \max\{T_1, T_2\}$ et quelle est leur signification dans ce contexte ? Montrer que le vecteur aléatoire $(T_{(1)}, T_{(2)} - T_{(1)})$ possède une densité et la calculer. Les variables aléatoires $T_{(1)}$ et $T_{(2)} - T_{(1)}$ sont-elles indépendantes ? Comment pouvez-vous interpréter les résultats obtenus ?

Exercice III.

Au lancer d'une pièce on obtient pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce d'une manière répétée et on note W le nombre minimal de jets pour obtenir k fois pile ($k \geqslant 1$). Expliquer pourquoi W peut s'écrire comme une somme de k variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique. Montrer que la limite en loi $\lim_{p\to 0} 2pW$ est une variable aléatoire de loi gamma dont on indiquera les paramètres.

Exercice IV.

Soit g la densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne réelle d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$.

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}} (x-m) g(x)^2 dx$.
2. Soit $d \geqslant 1$ entier et $f_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_d(x_1, \ldots, x_d) := \left(\prod_{i=1}^{d} g(x_i) \right) \left(1 + \prod_{j=1}^{d} (x_j - m) g(x_j) \right), \; (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

   Montrer que, pour tout entier $d \geqslant 1$, f_d est une densité de probabilité.
3. On désigne par $(X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire admettant f_d comme densité de probabilité et soit p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant d-1$. Montrer que la densité f_p du p-uplet $(X_1, \ldots, X_p)$ vaut $f_p(x_1, \ldots, x_p) = g(x_1) \ldots g(x_p)$.
4. Le p-uplet $(X_1, \ldots, X_p)$ est-il gaussien ?
   Les variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_p$ sont-elles indépendantes ?
   Le vecteur $(X_1, \ldots, X_d)$ est-il gaussien ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice V.

Soit $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité $f(x) = e^{1-x}\mathbb{1}_{x\geqslant 1}$. Dans la suite on justifiera soigneusement chaque passage à la limite en précisant le sens des convergences.

1. Que valent les limites suivantes :

$$\ell_1 := \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j)^2, \quad \ell_2 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j^2 \quad \text{et} \quad \ell_3 := \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} Z_j Z_k.$$

   Pour calculer ℓ_3 on pourra utiliser les deux suites précédentes.

2. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites, quand $n \to \infty$, des suites :

$$\sqrt{n}\left((\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j)^2 - 4\right), \ \sqrt{n}\left((\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j^2) - 5\right), \ \sqrt{n}\left((\frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} Z_j Z_k) - 4\right).$$