Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Magistère Mathématiques 1ère année
Année 2011 - 2012

Probabilités de base : examen

jeudi 26 avril 2012 - durée 2 heures - résumé autorisé

Exercice I.

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathrm{E}\big[|X|^\alpha\big] < \infty$, où $\alpha \in]0,1[$. Montrer que la fonction caractéristique de X est une fonction α-hölderienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| \leqslant c\,|t-s|^\alpha,\ \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra justifier et utiliser l'inégalité $2 \wedge |a| \leqslant 2^{1-\alpha}|a|^\alpha$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice II.

Soient $W_1, \ldots, W_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $2\lambda W_1$? Montrer que la variable aléatoire $2\lambda(W_1 + \ldots + W_n)$ est de loi $\chi^2(2n) = \gamma(n, \frac{1}{2})$. Justifier vos calculs.

Exercice III.

On considère $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes qui sont aussi indépendantes entre elles. On suppose que pour tout $n \geqslant 1$ les variables X_n ont la même loi admettant un moment d'ordre deux et que les variables ε_n sont de loi $\frac{1}{2}\,\delta_{-1} + \frac{1}{2}\,\delta_1$. Les questions suivantes sont indépendantes et pour chacune on justifiera soigneusement les raisonnements.

1. Que vaut $\mathrm{P}(\limsup_n\{\varepsilon_n = 1\})$?
   En déduire que la suite des ε_n ne peut garder un signe constant après un certain rang.
2. On pose $V_n := \frac{1}{n}(\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2 + \ldots + \varepsilon_n X_n)$. Montrer que V_n converge, lorsque $n \to \infty$, vers une constante. Calculer cette constante et préciser le sens de la convergence.
3. Montrer que $W_n := \big[\varepsilon_1(X_1 + X_2) + \varepsilon_2(X_3 + X_4) + \ldots + \varepsilon_n(X_{2n-1} + X_{2n})\big]/\sqrt{n}$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$. Identifier cette limite.

Exercice IV.

Soit (X, Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance égale à l'identité.

1. Écrire la densité du couple (X, Y).
2. Notons $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\Theta := \arctan \frac{Y}{X}$.
   (a) Prouver que Θ est une variable aléatoire bien définie.
   (b) Trouver la loi du couple (R, Θ) et prouver que les variables aléatoires R et Θ sont indépendantes. Quelle est la loi de R ? Celle de Θ ?
3. Soit $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, à support compact inclus dans $]0, \infty[$. Définissons :
   $$X' := R\cos(\Theta + g(R)),\ \ Y' := R\sin(\Theta + g(R)).$$
   (a) Prouver que (X', Y') a même loi que (X, Y), c'est-à-dire est un couple gaussien centré de matrice de covariance égale à l'identité. On pourra remarquer que, pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et pour tout angle ϕ,
   $$\int_0^{2\pi} h(\cos(\theta + \phi), \sin(\theta + \phi))d\theta = \int_0^{2\pi} h(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.$$
   (b) A quelle condition sur g a-t-on $(X, Y) = (X', Y')$ presque sûrement ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice V.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ on considère $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi Q donnée par $Q(B) := \mathrm{P}(Y_1 \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$, indépendante de la suite $\{Y_n\}$ et on note, pour $k \geqslant 0$ entier, $p_k := \mathrm{P}(N = k)$. Pour chaque $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit

$$Z_B(\omega) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N(\omega)} \mathbb{1}_B(Y_j(\omega)) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases} \quad , \quad \omega \in \Omega.$$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_B(Y_j)$?
2. Montrer que Z_B est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$ et calculer sa loi, autrement dit $\mathrm{P}(Z_B = m)$, pour $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.
   On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité $\{Z_B = m\} = \bigcup_{k\geqslant 0}\{Z_B = m, N = k\}$.
3. Calculer la loi du couple (Z_B, Z_{B^c}) en suivant la même méthode.
4. Montrer que si N est de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors Z_B et Z_{B^c} sont indépendantes. Déterminer la loi de Z_B dans ce cas.