Université de Rennes 1 — Magistère Mathématiques 1ère année
ENS Cachan, antenne de Bretagne — Année 2010 - 2011

Probabilités de base : examen

vendredi 15 avril 2010 - durée 2 heures - résumé autorisé

Exercice I.

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathrm{E}(X) = 2\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{E}(X) \notin \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{P}(X < \mathrm{E}(X)) = 1/2$.

Exercice II.

Soit V une variable aléatoire réelle de densité donnée par $f(v) := k/(1+v^2)^m$, $v \in \mathbb{R}$ et $m > 1/2$.

1. Que doit valoir k ? On pourra utiliser l'égalité $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.
2. Pour quels $p \in]0, \infty[$, $V \in \mathrm{L}^p$?
3. Si $m = 1$, quelles sont les réponses aux deux questions précédentes ?

Exercice III.

Soient S_n et T_m des variables aléatoires indépendantes, de lois de Poisson de paramètres n et m, respectivement.

1. Étudier l'existence des limites $\lim\limits_{n\to\infty} S_n/n$ et $\lim\limits_{m\to\infty} T_m/m$, en probabilité.
2. Trouver la loi de la variable aléatoire $S_n + T_m$ et calculer la limite en probabilité, lorsque $n, m \to \infty$, de $\sqrt{(S_n + T_m)/(n+m)}$.
3. Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{n,m}$ de $U_{n,m} := [(S_n - n) - (T_m - m)]/\sqrt{n+m}$.
4. En déduire que $\lim_{n,m\to\infty} U_{n,m} = G \sim \mathcal{N}(0,1)$ en loi. On pourra étudier la limite de $\ln \varphi_{n,m}$.
5. Justifier l'existence et calculer la limite en loi de $[(S_n - n) - (T_m - m)]/\sqrt{S_n + T_m}$, quand $n, m \to \infty$.

Exercice IV.

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes, gaussiennes, centrées et de même variance σ^2. Soit A une matrice orthogonale $n \times n$. On définit $Y_1, \ldots, Y_n$, n variables aléatoires réelles par :
$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes, gaussiennes, centrées et de même variance σ^2.
   (b) On définit $S := \sum_{j=1}^n X_j$ et $T := \sum_{j=1}^n (X_j - S/n)^2$.
   Supposons que A est telle que sa première ligne vérifie $a_{1j} = 1/\sqrt{n}$, pour $j = 1, \ldots, n$. Montrer que $T = \sum_{j=2}^n Y_j^2$. En déduire que S et T sont indépendantes.
2. Supposons, cette fois, que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes, centrées, de même loi, de variance σ^2 finie, mais de loi inconnue. En revanche, on fait l'hypothèse que les variables S et T, définies comme précédemment, sont indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

(a) Montrer que $\mathrm{E}(T) = (n-1)\sigma^2$.

(b) Pour s, t deux réels, on définit $\varphi(s) := \mathrm{E}(e^{isX_1})$ et $\psi(s,t) := \mathrm{E}(e^{i(sS+tT)})$.
Dire pourquoi φ est deux fois dérivable et ψ est différentiable ?
Montrer que $\psi(s,t) = [\varphi(s)]^n \mathrm{E}(e^{itT})$ et que $\mathrm{E}(Te^{isS}) = \mathrm{E}(T)[\varphi(s)]^n$.

(c) Montrer que,

$$\mathrm{E}(X_j^2 e^{isS}) = -\varphi''(s)[\varphi(s)]^{n-1},\ j \in 1, \ldots, n$$

et

$$\mathrm{E}(X_1 X_j e^{isS}) = -[\varphi'(s)]^2[\varphi(s)]^{n-2},\ j \in 2, \ldots, n.$$

En déduire

$$\mathrm{E}(Te^{isS}) = -(n-1)\varphi''(s)[\varphi(s)]^{n-1} + (n-1)[\varphi'(s)]^2[\varphi(s)]^{n-2}.$$

(d) En déduire que $\varphi''(s)\varphi(s) - [\varphi'(s)]^2 + \sigma^2[\varphi(s)]^2 = 0$.
Trouver φ, en admettant l'unicité de la solution de cette équation différentielle du second ordre, sous des conditions initiales qu'on indiquera.
En déduire que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont gaussiennes.

3. Énoncer le résultat obtenu.