UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Licence 3ème année
Année 2007/2008

Espaces vectoriels normés : examen de rattrapage

lundi 9 juin 2008 - durée 2 heures - calculatrice interdite - résumé autorisé

Exercice I.

Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E, F. Montrer que l'inverse T^{-1} est un opérateur linéaire et qu'il est continu si et seulement si $\inf\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| > 0$.

Exercice II.

Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E et on note P_M la projection orthogonale sur M. Montrer que $M = \{x \in E : \|P_M x\| = \|x\|\}$.

Exercice III.

Soit $p \geqslant 1$ un entier. On considère l'espace vectoriel $\ell_p := \{(u_j)_{j\geqslant 1} \subset \mathbb{R} : \sum_{j\geqslant 1} |u_j|^p < \infty\}$ muni de la norme $\|(u_j)\|_p := \left(\sum_{j\geqslant 1} |u_j|^p\right)^{1/p}$. Montrer que :

(a) ℓ_p est un espace de Banach par rapport à cette norme ;

(b) si $(u_j) \in \ell_p$ et si $1 \leqslant p \leqslant p'$, alors $\|(u_j)\|_{p'} \leqslant \|(u_j)\|_p$ et $\ell_p \subset \ell_{p'}$;

(c) si $p, q > 1$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors le dual $\ell_p^\star$ coïncide avec ℓ_q dans un sens à préciser.

Exercice IV.

Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé E et soit $u \in E \setminus M$. Montrer qu'il existe une fonctionnelle linéaire continue f sur E telle que $f(u) = 1$ et $M \subset N(f)$. On pourra utiliser l'application $g : M + \mathrm{Vect}(u) \to \mathbb{C}$ définie par $g(m + \alpha u) := \alpha$, $m \in M$, $\alpha \in \mathbb{C}$, après avoir étudié ses propriétés.

Exercice V.

Soit ℓ_2 l'espace des suites réelles $(u_j)_{j\geqslant 1}$ de carrés sommables, muni de la norme $\|(u_j)\|_2 := \left(\sum_{j\geqslant 1} |u_j|^2\right)^{1/2}$. On considère un élément $(u_j) \in \ell_2$ tel que $\|(u_j)\|_2 = 1$ et on pose $x_n := (\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{\text{premières } n \text{ places}} u_1, u_2, u_3, \ldots)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Montrer que :

(a) $x_n \in \ell_2$ et que $\|x_n\|_2 = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ entier ;

(b) la suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers $0 \in \ell_2$.

Exercice VI.

On munit l'espace vectoriel $E := \mathrm{C}([0, \pi]; \mathbb{R})$ des fonction réelles continues sur $[0, \pi]$ de la norme $\|x\|_\infty := \sup_{t\in[0,\pi]} |x(t)|$. Soit l'opérateur T défini sur E par

$$(Tx)(t) = \int_0^\pi (\cos s + \sin t) x(s) ds, \quad x \in E.$$

Tournez la page S.V.P.

(a) Montrer que $Tx \in E$ et qu'il s'agit d'un opérateur linéaire et continu.

(b) Montrer que $R(T) \subset \mathrm{Vect}(\mathbf{1}, \sin)$, où $\mathbf{1}(t) = 1$, $\forall t \in [0, \pi]$, est la fonction constante 1. En déduire que $\overline{T(B_E)}$ est un compact de E.

(c) Trouver $R(T^2)$.

(d) Calculer $(T \sin)$ et $(T \cos)$ et déduire qu'en fait $R(T) = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}, \sin)$.